كشف وتقييم الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وسيناريوهات التعامل معها

إعـــــــــــداد

د. أحمد سمير مجاهد أبو الحسن

أستاذ علم النفس التربوي المساعد

قسم علم النفس التربوي

كلية التربية – جامعة الزقازيق

الملخص:

يهدف البحث إلى التحقق من مدى اختلاف شكل البيانات ذات الأخطاء التغايرية عن شكل البيانات ذات الأخطاء الثابتة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد، وكذلك التحقق من مدى اختلاف دقة الكشف عن الأخطاء التغايرية باختلاف الطريقة المستخدمة للكشف عنها في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الدلالة الإحصائية، كما يهدف إلى التوصل إلى أفضل السيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الخطأ المعياري، أيضاً يحاول البحث التحقق من مدى اختلاف حدود فترات الثقة الدنيا والعليا (عند مستوى ثقة ٩٥٪ & ٩٩٪) لمعاملات الانحدار في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً للسيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية، وتم توليد البيانات باستخدام (أسلوب المحاكاة (مونت كارلو))؛ فقد تم توليد مجموعتين من البيانات باستخدام برنامج (R Core Team, 2023)؛ عدد كل مجموعة يساوي (١٠٠٠)؛ المجموعة الأولى؛ وتمثل البيانات ذات الأخطاء الثابتة، والمجموعة الثانية؛ وتمثل البيانات ذات الأخطاء التغايرية؛ بهدف التحقق من فروض البحث، وأشارت أهم النتائج إلى أن شكل البيانات ذات الأخطاء التغايرية يختلف عن شكل البيانات ذات الأخطاء الثابتة في

نموذج الانحدار الخطي المتعدد، كما تم التوصل إلى أن اختبار (White's Test of Heteroscedasticity) أكثر دقة في الكشف عن الأخطاء التغايرية منه في حالة اختبار (Breusch-Pagan Test of Heteroscedasticity)، أيضاً بينت النتائج أنه في حالة الأخطاء الثابتة فإن قيم معاملات الانحدار تتساوى تقريباً باختلاف السيناريوهات المفترضة؛ إلا أنه يمكن ترتيب السيناريوهات وفقاً لأفضليتها بصفة عامة حسب الخطأ المعياري وقيمة (ت) ودلالتها الإحصائية؛ بأن طريقة المربعات الصغرى العادية جاءت في المرتبة الأولى، يليها طريقة المربعات الصغرى الموزونة يليها مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية، كما بينت النتائج أنه في حالة الأخطاء التغايرية فإن قيم معاملات الانحدار تتساوى تقريباً باختلاف السيناريوهات المفترضة عدا طريقة المربعات الصغرى الموزونة؛ ويمكن ترتيب السيناريوهات وفقاً لأفضليتها بصفة عامة حسب الخطأ المعياري وقيمة (ت) ودلالتها الإحصائية؛ بأن مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية جاءت في المرتبة الأولى، يليها طريقة المربعات الصغرى الموزونة، وكشفت النتائج أنه في حالة الأخطاء الثابتة فإن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95% & 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95% & 99%) تتساوى تقريباً باختلاف السيناريوهات المفترضة، كما أشارت النتائج إلى أنه في حالة الأخطاء التغايرية فإن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95% & 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95% & 99%) تختلف باختلاف السيناريوهات المفترضة، ونجد أن طريقة المربعات الصغرى الموزونة أكثر تحفظاً من مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية.

الكلمات المفتاحية: الأخطاء التغايرية- الأخطاء الثابتة- محك الدلالة الإحصائية- محك الخطأ المعياري- أسلوب المحاكاة (مونت كارلو) - فترات الثقة- طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)- طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS)- مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية (HCCM)

Detecting and Assessing Heteroscedasticity in Multiple-Linear Regression Model and Scenarios for dealing With Them.

Summary- The research aims to verify the extent to which the form of data with heteroskedastic errors differs from the form of data with homoskedastic errors in the multiple linear regression model, as well as to verify the extent to which the accuracy of detecting heteroscedastic errors differs depending on the method used to detect them in the multiple linear regression model according to the criterion of statistical significance. It aims to reach the best assumed scenarios used to deal with data with heteroscedastic errors in the multiple linear regression model according to the standard error criterion. The research also attempts to verify the extent to which the limits of the lower and upper confidence intervals differ (at the 95% & 99% confidence interval) for the regression coefficients in Multiple linear regression according to the hypothesized scenarios used to deal with data with heteroscedastic errors, The data was generated using the Monte Carlo simulation method. Two sets of data were generated using (R Core Team, 2023). The number of each set is (1000) cases. The first group represents data with homoskedastic errors, and the second group represents data with heteroscedastic errors, with the aim of verifying the research hypotheses. The most important results indicated that the form of data with heteroscedastic errors differs from the form of data with homoskedastic errors in the multiple linear regression model. It was also found that the (White،s Test of Heteroscedasticity) test is more Accuracy in detecting heteroscedastic errors than in the case of the Breusch-Pagan Test of Heteroscedasticity. The results also showed that in the case of homoskedastic errors, the values of the regression coefficients are approximately equal depending on the assumed scenarios. However, the scenarios can be arranged according to their general preference, according to the standard error, the value of (t), and their statistical significance. The ordinary least squares method came in first place, followed by the weighted least squares method, followed by Heteroscedasticity consistent covariance matrix (HCCM). The results also showed that in the case of heteroscedastic errors, the values of the regression coefficients are approximately equal according to the

assumed scenarios, except for the weighted least squares method. The scenarios can be arranged according to their general preference according to the standard error, the value of (t), and their statistical significance, which is that Heteroscedasticity consistent covariance matrix (HCCM) comes in first place, followed by the weighted least squares method. The results revealed that in the case of homoskedastic errors, the lower confidence intervals (CI Lower 95% & 99%) and the upper confidence intervals (CI Upper 95% & 99%) are approximately equal depending on the assumed scenarios. The results also indicated that in the case of heteroscedastic errors, the confidence intervals The lower (CI Lower 95% & 99%) and upper confidence intervals (CI Upper 95% & 99%) differ depending on the assumed scenarios, and we find that the weighted least squares method is more conservative than the Heteroscedasticity consistent covariance matrix (HCCM).

Keywords: heteroskedastic errors - Homoskedastic errors - statistical significance criteria - Standard error criteria - Simulation method (Monte Carlo) - Confidence intervals - Ordinary least squares (OLS) method - Weighted least squares (WLS) method - Heteroscedasticity consistent covariance matrix (HCCM)

مقدمة:

يهدف علم النفس التربوي كغيره من العلوم إلى الوصف والضبط والتنبؤ؛ فهو يحاول وصف الظواهر النفسية وتفسيرها ويضع الأسس والمبادئ لضبطها والتحكم فيها، ويحاول التنبؤ بالظواهر النفسية المختلفة من المتغيرات التي ترتبط بها من خلال وضع النماذج المفاهيمية المختلفة.

ويُستخدم النموذج المفاهيمي كتمثيل مجرد للارتباطات المتوقعة بين المفاهيم أو الأفكار المصممة لتمثيل أفكار أوسع (مثل احترام الذات، أو الأيديولوجيات المختلفة، أو التعليم)، وتسترشد النماذج الإحصائية بالنماذج المفاهيمية، التي تُستخدم لتحديد الفرضيات أو أسئلة البحث. وتحدد النماذج الإحصائية العلاقات الاحتمالية بين مجموعة من المتغيرات؛ بهدف تقدير ما إذا كانت هناك أنماط غير عشوائية فيما بينها. وتميل النماذج الإحصائية إلى أن تكون تبسيطًا للتعقيد الذي يحدث في الطبيعة، ولكنها تقدم تفاصيل كافية للتنبؤ أو فهم الأنماط في البيانات. ونموذج الانحدار هو نوع من النماذج الإحصائية التي تهدف إلى تقدير الارتباط بين واحد أو أكثر من المتغيرات التوضيحية أو التفسيرية ومتغير نتيجة (تابع) واحد، ونماذج الانحدار نموذجان هما: **النموذج الأول** ويسمى نموذج الانحدار الخطي البسيط (Simple Linear Regression Model (SLRM))، أو ما يطلق عليه البعض نموذج الانحدار ثنائي المتغير؛ يُستخدم مصطلح بسيط؛ لأن هذا النموذج يتضمن متغيراً تفسيريًا واحدًا فقط ومتغير نتيجة (تابعاً) واحداً فقط، **والنموذج الثاني** ويسمى نموذج الانحدار الخطي المتعدد (Multiple Linear Regression Model (MLRM))؛ ويتضمن عدة متغيرات تفسيرية ومتغير نتيجة (تابعاً) واحداً فقط، والفرق بين نموذج الانحدار الخطي البسيط والمتعدد يظهر في تفسير المعاملات (Hoffmann, 2021, pp. 37-38 & 65).

ويُعد أحد الافتراضات المعيارية التي يقوم عليها نموذج الانحدار الخطي هو أن الأخطاء موزعة بشكل متماثل وبشكل مستقل (موزعة اعتدالياً) (independently identically distributed (i.i.d.)). على وجه الخصوص، عندما تكون الأخطاء موزعة بشكل متماثل وبشكل مستقل؛ فهي متجانسة (homoscedastic). وإذا كانت الأخطاء ليست موزعة بشكل متماثل وبشكل مستقل، ويفترض أن يكون لها توزيعات مع تباينات مختلفة؛ فيقال أن الأخطاء غير متجانسة (متغايرة) (heteroscedastic Errors)(Klein et al., 2016, p. 568).

ويمكن أن يكون التباين غير الثابت (التغايرية) (heteroscedasticity) مشكلة كبيرة؛ لأن نقاط البيانات ذات التباين الأكبر يمكن أن يكون لها تأثير غير متناسب على تقدير المعلمات(Barker & Shaw, 2015, p. 538).

ولا يؤثر (انتهاك افتراض التجانس) أو بالمعني المستخدم هنا (التغايرية) في طريقة المربعات الصغرى للنماذج الانحدارية على معاملات الانحدار، لكنها تؤثر على دقة الأخطاء المعيارية (وبالتالي، فترات الثقة واختبارات الدلالة الإحصائية)(Brown, 2014, p. 228).

ومن الناحية التقليدية؛ فإن النهج الأول (وربما الوحيد) الذي يعرفه معظم الباحثين في علم النفس أو العلوم الاجتماعية للتعامل مع التغايرية هو تحويل البيانات (data transformation). ويميل التحول اللوغاريتمي إلى أن يكون شائعًا جنبًا إلى جنب مع غيره من أدوات "استقرار التباين" مثل الجذر التربيعي. التحويلات، وللأسف، تحمل درجة معينة من التعسف من حيث اختيار تحويل دون الآخر. ويمكن أيضًا للتحويلات تغيير معنى المتغيرات بشكل جذري (وحتى نموذج الانحدار نفسه)؛ بحيث يكون تفسير تقديرات المعلمات مرهونًا الآن بالتدرج الجديد أو التحويل الجديد الناجم عن التحول. وأخيرًا، ليس من الصعب أن يجد الفرد نفسه في المواقف التي تكون

فيها التحولات محدودة دون أي تأثير؛ مما يجعل الطريقة الوحيدة التي يعرفها معظم الباحثين لمعالجة هذه المشكلة غير صالحة(Astivia & Zumbo, 2019, p. 7).

لذلك تأتي أهمية البحث الحالي في أنه يُقدم مجموعة من السيناريوهات التي يستخدمها الباحثون والدارسون للنماذج الخطية للانحدار في حالة (انتهاك افتراض التجانس) أو (التغايرية) في طريقة المربعات الصغرى؛ لأن انتهاك هذا الافتراض يؤثر على فترات الثقة وبالتالي الدلالة الإحصائية؛ أي يؤثر على عملية الاستدلال الإحصائي.

والتغايرية لها العديد من التبعات أو العواقب منها: (١) لا تغير التغايرية خصائص عدم التحيز والاتساق لمُقَدَّرات المربعات الصغرى (OLS)، (٢) لكن مُقَدَّرات المربعات الصغرى (OLS) لم تعد ذات حد أدنى من التباين أو الكفاءة؛ أي أنها ليست أفضل مُقَدَّر خطي غير متحيز (best linear unbiased estimators (BLUE))؛ ولكن هي ببساطة مُقَدَّرات خطية غير متحيزة (linear unbiased estimators (LUE))، (٣) نتيجة لذلك؛ قد لا يكون الاختباران (t and F tests) القائمان على الافتراضات المعيارية لنموذج الانحدار الخطي التقليدي موثوقًا بهما؛ مما يؤدي إلى استنتاجات خاطئة فيما يتعلق بالدلالة الإحصائية لمعاملات الانحدار المُقَدَّرة، (٤) في حالة وجود التغايرية، يتم توفير أفضل مُقَدَّر خطي غير متحيز (best linear unbiased estimators (BLUE)) بطريقة المربعات الصغرى الموزونة (weighted least squares (WLS)). بسبب هذه التبعات أو العواقب، من المهم أن نتحقق من التغايرية. (Gujarati, 2011, pp. 82-83)

وباستقراء الدراسات والبحوث السابقة في هذا السياق نجد على سبيل المثال لا الحصر؛ أن دراسة (Astivia & Zumbo, 2019) أكدت على أن انحدار المربعات الصغرى العادية (OLS) أحد أكثر التقنيات شيوعًا لتحليل البيانات، كما أنه يقتصر معظم التدريب الذي تلقاه علماء العلوم الاجتماعية فيما يتعلق بالتجانس

على العروض الرسومية للكشف عن التغايرية وتحويلات البيانات كإجراء للحل؛ مما يعطي القليل من سبل الانتصاف إذا لم ينجح أي من هذين النهجين.

كما أن دراسة (Astivia & Zumbo, 2019) قدمت ثلاثة اختبارات إحصائية مختلفة مشتقة من أدبيات الاقتصاد القياسي، والتي نادرًا ما تُستخدم في علم النفس أو العلوم الاجتماعية؛ من أجل استكمال استكشاف انتهاكات الافتراض داخل إطار انحدار المربعات الصغرى (OLS)؛ الاختبار الأول وربما الأكثر كلاسيكية هو اختبار (Breusch – Pagan test)، والاختبار الثاني المهم هو اختبار (White test) ويبحث في صيغ الدوال غير الخطية وذات الرتب الأعلى للجزء التنبؤي X، والاختبار الأخير هو اختبار (Breusch-Godfrey test)، والذي يحاول اكتشاف ما إذا كانت الصفوف المتتالية في مصفوفة البيانات مرتبطة أم لا.

وناقشت دراسة (Barker & Shaw, 2015) طرق تقييم افتراضات نموذج انحدار المربعات الصغرى والخطوات التي يمكن للفرد اتخاذها في حالة انتهاك هذه الافتراضات، وكذلك التقييم والاستجابات المناسبة لانتهاك الافتراضات.

وتعد عملية توليد البيانات (أسلوب المحاكاة (مونت كارلو)) من التقنيات الإحصائية الحديثة، والتي تتيح للعلماء والباحثين التحقق من مشكلات نظرية قد تنتج في الواقع الفعلي، ولكن لا تستطيع أدوات القياس إظهارها في وقت معين، وتحقق مثل هذه التقنية تلك الحاجة إلى توليدها؛ لكي تتم دراستها وبحث الطرق والسيناريوهات للتعامل معها في حال وجودها.

ويأتي هذا البحث قائماً ومعتمداً على تلك العملية؛ حيث إنه في الواقع العملي قد لا نستطيع الحصول على مثل تلك البيانات التي لها خصائص معينة تُنتهك فيها بعض الافتراضات؛ فتأتي عملية توليد البيانات لتسد تلك الفجوة وتقدم لنا البيانات المطلوبة؛ بهدف دراستها والتعامل معها في حال وجودها في واقعنا الفعلي.

ويذكر (Hoffmann, 2021, p. 37) أن إحدى الطرق المفيدة للتفكير في النماذج الإحصائية؛ هي أنها تقوم بتقييم الطرق التي ربما تم بها إنتاج مجموعة من البيانات، أو باللغة الإحصائية؛ عملية توليد البيانات (Data Generating Process (DGP)).

والبحث الحالي يحاول دراسة البيانات ذات الأخطاء التغايرية مقارنةً بالبيانات ذات الأخطاء الثابتة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد، وكذلك طرق الكشف عن الأخطاء التغايرية، وأيضاً يبحث في أفضل السيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد، ويحاول التعرف على مدى اختلاف حدود فترات الثقة الدنيا والعليا (عند مستوى ثقة ٩٥٪ & ٩٩٪) لمعاملات الانحدار في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً للسيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية.

مشكلة البحث:

يمكن صياغة مشكلة البحث الحالي كما يلي:

١- هل يختلف شكل البيانات ذات الأخطاء التغايرية عن شكل البيانات ذات الأخطاء الثابتة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد؟

٢- هل تختلف دقة الكشف عن الأخطاء التغايرية باختلاف الطريقة المستخدمة للكشف عنها في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الدلالة الإحصائية؟

٣- ما أفضل السيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الخطأ المعياري؟

٤- هل تختلف حدود فترات الثقة الدنيا والعليا (عند مستوى ثقة ٩٥٪ & ٩٩٪) لمعاملات الانحدار في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً

للسيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية؟

أهداف البحث:

يهدف البحث الحالي إلى التعرف على:

١- مدى اختلاف شكل البيانات ذات الأخطاء التغايرية عن شكل البيانات ذات الأخطاء الثابتة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

٢- مدى اختلاف دقة الكشف عن الأخطاء التغايرية باختلاف الطريقة المستخدمة للكشف عنها في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الدلالة الإحصائية.

٣- أفضل السيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الخطأ المعياري.

٤- مدى اختلاف حدود فترات الثقة الدنيا والعليا (عند مستوى ثقة ٩٥٪ & ٩٩٪) لمعاملات الانحدار في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً للسيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية.

أهمية البحث:

أولاً: أهمية البحث النظرية:

١- يسلط البحث الضوء على متغير جديد نسبياً وهو "الأخطاء التغايرية" في نموذج الانحدار الخطي المتعدد؛ مما يحقق إثراء المكتبة المصرية والعربية بأدبيات تساعد على فهمه والتعامل معه.

٢- يوفر البحث خلفية نظرية مفيدة وكافية للباحثين في مجال علم النفس التربوي بصفة عامة والقياس النفسي بصفة خاصة والدارسين للظواهر النفسية التي تستخدم الانحدار (التنبؤ) ببعض المتغيرات من متغيرات أخرى.

٣- يستخدم البحث أسلوب دراسة المحاكاة وهو توليد البيانات؛ من أجل دراسة مشكلة ببيانات ذات طبيعة خاصة قد لا نستطيع الحصول عليها في الواقع الفعلي ولن نستطيع التغلب عليها مالم نجد مثل هذه البيانات؛ فنقوم بتوليدها من خلال الطرق الحديثة في الإحصاء.

٤- يدرس البحث نموذج الانحدار الخطي المتعدد، ولذلك فهو يتضمن نموذج الانحدار الخطي البسيط في حالة الاكتفاء بمتغير تفسيري واحد من المتغيرات التفسيرية بنموذج الانحدار الخطي المتعدد؛ بما يثري البحث ويحقق التكامل في حالة استخدام الباحثين أحد النموذجين.

ثانياً: أهمية البحث التطبيقية:

١- يوفر البحث أسلوباً بيانياً (أشكالاً بيانية رسومية) يتعرف الباحثون والدارسون من خلالها على شكل البيانات ذات الأخطاء التغايرية والبيانات ذات الأخطاء الثابتة من حيث التباين.

٢- يقدم البحث مجموعة من الطرق الإحصائية التي تستخدم للتعرف على الأخطاء التغايرية في حالة تعذر معرفتها بيانياً (عن طريق الأشكال البيانية الرسومية).

٣- يقارن البحث بين هذه الطرق الإحصائية التي تستخدم للتعرف على الأخطاء التغايرية؛ مما يساعد في التوصية باختيار طريقة مناسبة للكشف عن البيانات ذات الأخطاء التغايرية.

٤- يقدم البحث سيناريوهات مناسبة ودقيقة في حالة وُجدت بيانات ذات أخطاء تغايرية.

٥- يقارن البحث بين هذه السيناريوهات المناسبة والدقيقة في حالة وُجدت بيانات ذات أخطاء تغايرية؛ مما يساعد في التوصية باختيار أحد هذه السيناريوهات للتعامل الأمثل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية.

مصطلحات البحث:

١- الأخطاء التغايرية (heteroscedastic Errors):

تنشأ الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \mu_i, (i = 1, 2, 3, \ldots, n, k = 1)$$

نموذج الانحدار الخطي هو نموذج الانحدار أحادي المتغير (البسيط) عندما يكون $k = 1$ ونموذج الانحدار المتعدد عندما يكون $k \geq 2$، وعدد المتغيرات التفسيرية في النموذج هو k، Y يسمى المتغير التابع، $x_1, x_2, \ldots x_k$ تسمى المتغيرات التفسيرية (المتغيرات المستقلة). في نموذج الانحدار السابق، عندما لا يتحقق $\mathrm{var}(\mu_i) = \sigma^2$ لكل المشاهدات $i(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$، وعندما لا يتم استيفاء هذا الشرط، ولكن يتم استيفاء الافتراضات الأساسية الأخرى، أي عندما تكون $\mathrm{var}(\mu_i) = \sigma_i^2$ أي لا تساوي قيمة ثابتة؛ فإن التباين في مصطلح الخطأ العشوائي لم يعد ثابتًا، ولكنه يختلف باختلاف المشاهدات؛ حينئذ يقال إن مصطلح الخطأ μ_i لديه تغايرية (heteroscedasticity). (Jiang & Deng, 2021, p. 401) & (Brown, 2014, p. 232)

٢- الأخطاء الثابتة (homoskedastic Errors):

تنشأ الأخطاء الثابتة في نموذج الانحدار الخطي التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \mu_i, (i = 1, 2, 3, \ldots, n, k = 1)$$

نموذج الانحدار الخطي هو نموذج الانحدار أحادي المتغير عندما يكون $k = 1$ ونموذج الانحدار المتعدد عندما يكون $k \geq 2$، وعدد المتغيرات التفسيرية في النموذج هو k، Y يسمى المتغير التابع، $x_1, x_2, \ldots x_k$ تسمى المتغيرات التفسيرية (المتغيرات

المستقلة). في نموذج الانحدار السابق، إذا كان هناك $\text{var}(\mu_i) = \sigma^2$ لكل المشاهدات $i(i = 1,2,3,\ldots,n)$، بغض النظر عن القيمة المأخوذة x، فإن μ_i لها يكون متماثلاً. (Jiang & Deng, 2021, p. 401) & (Brown, 2014, p. 232)

٣- محك الدلالة الإحصائية (P-Value):

تمثل قيمة (P-Value) احتمال حدوث اختلاف ملحوظ عن طريق الصدفة العشوائية، إنه احتمال الحصول على أي قيمة في أقصى منحنى التوزيع الاحتمالي، كلما انخفضت قيمة (P-Value)، كلما زاد الفرق الإحصائي بين العينتين.(Das & (Das, 2023, p. 1

٤- محك الخطأ المعياري (Standard Error):

الخطأ المعياري هو أحد الأدوات الرياضية المستخدمة في الإحصاء لتقدير التباين، يتم اختصاره لـ(SE). والخطأ المعياري للإحصاء أو تقدير المعلمة هو الانحراف المعياري لتوزيع العينات. ويمكننا تعريفه على أنه تقدير لهذا الانحراف المعياري. (Musselwhite & Wesolowski, 2018, p. 2)

٥- فترات الثقة لمعاملات الانحدار (Confidence Intervals):

يتم بناء فترات الثقة عن طريق الخطأ المعياري في القياس. وفي ظل افتراضات التوزيع الطبيعي، فإنه يكون في ٦٨٪ من الحالات، تقع الدرجات الحقيقية ضمن خطأ معياري واحد في القياس أعلى أو أقل من المتوسط (±١). بعد ذلك، في ٩٦٪ من الحالات، تقع الدرجات الحقيقية ضمن خطأين معياريين في القياس أعلى أو أقل من المتوسط (±٢). وأخيرًا، في ٩٩.٧٪ من الحالات، تقع الدرجات الحقيقية ضمن ثلاثة أخطاء معيارية في القياس أعلى أو أقل من المتوسط (±٣). (Musselwhite (& Wesolowski, 2018, p. 4

٦- السيناريوهات المفترضة للتعامل مع الأخطاء التغايرية:

- طريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least squares) OLS)):

هي حالة خاصة من الطريقة العامة والتي تُعرف بطريقة المربعات الصغرى المعممة (generalized least squares (GLS)) وفيها تكون الأخطاء متماثلة ومستقلة (independent and identically distributed)، ويتم حساب معاملات الانحدار (b) ومصفوفة التغاير (C) كما يلي:

$b=(X'X)^{-1}X'y$ ، X؛ هي مصفوفة المتغيرات المتنبئة، X'؛ هي مدور مصفوفة المتغيرات المتنبئة، y هو المتغير التابع.

$C=\hat{s}_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}$، حيث إن $\hat{s}_{\varepsilon}^{2}$ خطأ مربع المتوسط (the mean square error) (Brown, 2014, p. 231)

- طريقة المربعات الصغرى الموزونة (Weighted Least squares)) :WLS)

هي حالة خاصة من الطريقة العامة والتي تُعرف بطريقة المربعات الصغرى المعممة (generalized least squares (GLS)) وفيها تكون الأخطاء غير متماثلة، ولكنها مستقلة (independent and not identically distributed)، ويتم حساب معاملات الانحدار (b) ومصفوفة التغاير (C) كما يلي:

$b=(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}y$، X؛ هي مصفوفة المتغيرات المتنبئة، X'؛ هي مدور مصفوفة المتغيرات المتنبئة، Σ؛ هي مصفوفة التغاير للأخطاء أو البواقي وهي قطرية وغير متساوية القيم والعناصر خارج القطر جميعها تساوي الصفر، y هو المتغير التابع.

$b=\hat{s}_{\varepsilon}^{2}(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$ حيث إن $\hat{s}_{\varepsilon}^{2}$ خطأ مربع المتوسط (the mean square error) (Brown, 2014, p. 237&240)

- مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية (Heteroscedasticity consistent covariance matrix (HCCM) (HC3))

نظراً لأن التغايرية تؤثر على الأخطاء المعيارية ولا تؤثر على معاملات الانحدار فإنه في حالة انتهاك افتراض ثبات التباين تكون مصفوفة التغاير كما يلي:

$$HC3 = (X'X)^{-1} X' \text{diag}\left[\frac{e_i^2}{(1-h_{ii})^2}\right] X(X'X)^{-1};$$

$$h_{ii} = x_i'(X'X)^{-1} x_i$$

حيث إن X هي مصفوفة المتغيرات المشاهدة، h_{ii} هو (leverage values)، e_i^2 هي مربعات قيم البواقي الناتجة من تحليل بطريقة المربعات الصغرى العادية(Brown, 2014, p. 241).

الإطار النظري:

في هذا الجزء سيتم عرض إطار نظري عن التغايرية من حيث: أنها قضية مهمة للعديد من العلماء- مصادر نشأة التغايرية- التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد- أصل مصطلح التغايرية ومفهومه- أثر التغايرية على نموذج الانحدار الخطي المتعدد- انتهاك افتراض التجانس في طريقة المربعات الصغرى العادية والوقوع في التغايرية- كشف وتقييم وتشخيص التغايرية من خلال الرسوم البيانية- كشف وتقييم وتشخيص التغايرية من خلال الاختبارات الإحصائية المختلفة والمحك المستخدم للمقارنة- سيناريوهات التعامل مع التغايرية والمحكات المستخدمة لترتيب أفضلية السيناريوهات.

التغايرية قضية مهمة للعديد من العلماء:

الافتراض الأساسي لتحليل الانحدار الخطي الكلاسيكي هو أن أجزاء الخطأ العشوائية للنموذج والتي يرمز لها بالرمز μ_i تكون متجانسة (homoskedastic)، أي أن لها نفس التباين σ^2. مع ذلك، فقد أظهرت الدراسات أن التغايرية ظاهرة

عالمية تقريبًا عندما يتم إجراء تحليل الانحدار باستخدام بيانات مقطعية أو متسلسلة زمنياً. لذلك، أصبحت دراسة التغايرية في النمذجة قضية مهمة للعديد من العلماء(Jiang & Deng, 2021, p. 400).

فالأخطاء غير المتجانسة (Heteroscedastic errors) هي ظاهرة متكررة في نماذج الانحدار الخطي (LRMs) ويبدو أنها شائعة بشكل خاص في البيانات المقطعية (cross-sectional data)، أو البيانات التي يتم جمعها في وقت واحد(Hoffmann, 2021, p. 166).

ويمكن أن تكون التغايرية (heteroscedasticity) مشكلة كبيرة؛ لأن نقاط البيانات ذات التباين الأكبر يمكن أن يكون لها تأثير غير متناسب على التقديرات(Barker & Shaw, 2015, p. 538).

لذلك يقترح بعض الخبراء أنه نظرًا لأن الأخطاء التغايرية تمثل مشكلة شائعة في نماذج الانحدار الخطية (LRMs)؛ **فيجب علينا دائمًا استخدام طريقة لتصحيح أو تقليل تلك الأخطاء التغايرية**؛ ففي حالة عدم وجود أخطاء تغايرية، تكون نتائج النماذج المصححة وغير المصححة متشابهة، ولكن في حالة وجود أخطاء تغايرية، فإن نتائج النماذج يمكن أن تكون مضللة(Hoffmann, 2021, pp. 182-183).

مصادر نشأة التغايرية:

تنشأ التغايرية في النموذج عمومًا من أربعة مصادر هي: إغفال بعض المتغيرات التفسيرية المهمة من النموذج، إعداد نموذج ضعيف، خطأ القياس الناشئ عن بيانات العينة، والاختلاف في الخطأ مع مرور الوقت(Jiang & Deng, 2021, p. 402).

إحدى المشكلات الشائعة في البيانات ذات المقطع العرضي (cross-sectional data) هي التغايرية (التباين غير المتكافئ) في مصطلح الخطأ. وهناك العديد من الأسباب وراء التغايرية؛ مثل وجود القيم المتطرفة في البيانات، أو الصيغة غير الصحيحة لدالة نموذج الانحدار، أو التحويل غير الصحيح للبيانات، أو خلط

المشاهدات بمقاييس مختلفة القياس (على سبيل المثال، خلط الأسر ذات الدخل المرتفع مع ذوي الدخل المنخفض)(Gujarati, 2011, p. 82).

التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

لسوء الحظ، يرفض بعض الباحثين الكميين نموذج الانحدار الخطي (Linear Regression Model)؛ لأن النماذج الإحصائية التي تم تطويرها مؤخرًا تعتبر أكثر صرامة أو تعقيدًا أو حتى رائجة. وفي بعض المواقف؛ قد يكون من الضروري اختيار نموذج إحصائي آخر، ولكن ليس من الحكمة تجاهل نموذج الانحدار الخطي (Linear Regression Model (LRM))؛ لأنه يظل أداة قيمة لدراسة الارتباطات الخطية بين المتغيرات، ووضع التنبؤات، وحتى في ظروف معينة، المساعدة في تحديد الارتباطات السببية. بالإضافة إلى ذلك، يظل شائعًا لأنه (١) سهل الاستخدام والفهم نسبيًا؛ (٢) البرامج الإحصائية لتقدير نماذج الانحدار الخطي متاحة على نطاق واسع؛ و(٣) توفر نماذج الانحدار الخطي طريقة مرنة وقوية لإجراء أنواع مهمة من التحليلات(Hoffmann, 2021, p. ix).

ونموذج الانحدار هو نوع من النماذج الإحصائية التي تهدف إلى تقدير الارتباط بين واحد أو أكثر من المتغيرات التوضيحية أو التفسيرية ومتغير نتيجة (تابع) واحد. ومن المفترض أن يعتمد المتغير النتيجة (التابع) على المتغيرات التوضيحية أو التفسيرية أو يتم التنبؤ بها. ولكن يُنظر إلى المتغيرات التفسيرية على أنها متنبئات مستقلة للمتغير النتيجة (التابع)؛ ومن ثم، فإنها غالباً ما تسمى المتغيرات المستقلة. ويفضل العديد من الباحثين تسمية تلك المتغيرات المدرجة في نموذج الانحدار بالمتغيرات التفسيرية والمتغيرات (النتيجة) التابعة، أو متغيرات التنبؤ والاستجابة، أو المتغيرات الخارجية والداخلية، أو مصطلحات مماثلة، فالاستجابة أو المتغير الداخلي مرادف لمتغير النتيجة؛ **النموذج الأول** يسمى نموذج الانحدار الخطي البسيط (Simple Linear Regression (SLRM))، أو ما يطلق عليه البعض نموذج

الانحدار ثنائي المتغير، يستخدم مصطلح بسيط لأن هذا النموذج يتضمن متغيراً تفسيريًا واحدًا فقط ومتغير نتيجة (تابعاً) واحداً فقط. (Hoffmann, 2021, pp. 37-38)

النموذج الثاني يسمى نموذج الانحدار الخطي المتعدد (Multiple Linear Regression (Multiple LRM))، ويتضمن عدة متغيرات تفسيرية ومتغير نتيجة (تابعاً) واحداً فقط، والفرق بين نموذج الانحدار الخطي البسيط والمتعدد في تفسير المعاملات(Hoffmann, 2021, p. 65).

في النموذج التالي تظهر ما تسمى بالتغايرية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \mu_i, (i = 1, 2, 3, \ldots, n, k = 1)$$

نموذج الانحدار الخطي هو نموذج الانحدار أحادي المتغير عندما يكون $k = 1$ ونموذج الانحدار المتعدد عندما يكون $k \geq 2$، وعدد المتغيرات التفسيرية في النموذج هو k، Y يسمى المتغير التابع، $x_1, x_2, \ldots x_k$ تسمى المتغيرات التفسيرية (المتغيرات المستقلة). ففي نموذج الانحدار السابق؛ إذا كان هناك $\mathrm{var}(\mu_i) = \sigma^2$ أي تجانس التباين (homoscedasticity) لكل المشاهدات $i(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$، بغض النظر عن القيمة المأخوذة x، فإن μ_i لها يكون متماثلاً، وعندما لا يتم استيفاء تجانس التباين، ولكن يتم استيفاء الافتراضات الأساسية الأخرى، أي عندما تكون $\mathrm{var}(\mu_i) = \sigma_i^2$ أي لا تساوي قيمة ثابتة؛ فإن التباين في مصطلح الخطأ العشوائي لم يعد ثابتًا، ولكنه يختلف باختلاف المشاهدات؛ حينئذ يقال أن مصطلح الخطأ μ_i لديه تغايرية (heteroscedasticity)(Jiang & Deng, 2021, p. 401)&(Brown, 2014, p. 232).

فإذا كانت جميع الافتراضات الخاصة بنموذج انحدار (OLS) للصيغة $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi} + \epsilon_i \ (for\ person \quad i)$ تم تحقيقها؛ فإن توزيع المتغير التابع Y هو $Y \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_p X_{pi}, \sigma_\epsilon^2)$، حيث إن σ_ϵ^2 هو تباين

الأخطاء $\in$. ويمكن للفرد حساب مصفوفة التباين–التغاير (variance-covariance matrix) للأخطاء مع نفسها؛ لتحليل ما إذا كان هناك أي تبعيات (dependencies) موجودة بينهم. مرة أخرى؛ إذا تم استيفاء جميع الافتراضات، يجب أن يكون لمصفوفة التباين–التغاير الصورة التالية:

$$Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \sigma^2 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 I \qquad (1)$$

حيث $E(.)$ تشير إلى القيمة المتوقعة، ε' هي عامل التحويل (transpose operator)، و I هي $i \times i$ مصفوفة الوحدة (identity matrix). لاحظ، مع ذلك، أنه يمكن للفرد أن يكون لديه بنية أكثر مرونة من تباينات الخطأ حيث تكون جميعها مختلفة، ولكن التغايرات (covariance) بين الأخطاء تكون صفر. في هذه الحالة، ستبدو مصفوفة التباين–التغاير للأخطاء كما يلي:

$$Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2{}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \sigma_3{}^2 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_i{}^2 \end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 I \qquad (2)$$

وأخيرًا، الصيغة الأكثر عمومية حيث تختلف تباينات الأخطاء وتكون التغايرات بين الأخطاء غير مساوية للصفر:

$$Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}{}^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,i-1} & \sigma_{1,i} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2}{}^2 & \cdots & \sigma_{2,i-1} & \sigma_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \sigma_{3,3}{}^2 & \vdots & \vdots \\ \sigma_{i-1,1} & \sigma_{i-1,2} & \sigma_{i-1,3} & \ddots & \sigma_{i-1,i} \\ \sigma_{i,1} & \sigma_{i,2} & \cdots & \sigma_{i,i-1} & \sigma_{i,i}{}^2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

أي انحرافات عن مصفوفة التباين–التغاير للأخطاء عما هو موضح في المعادلة (١) ينتج عنها ما يسمى بالتغايرية، والتأثير الذي تمارسه في الاستدلالات من نموذج الانحدار سيعتمد على حجم الاختلافات بين العناصر القطرية للمصفوفة بالإضافة إلى حجم تغايرات الخطأ(Astivia & Zumbo, 2019, p. 2).

أصل مصطلح التغايرية ومفهومه:

أحد افتراضات نموذج الانحدار الخطي هو التجانس (homoscedasticity)، ويشير مصطلح (homo) إلى (نفس) وكلمة (scedastic) تعني (التشتت) (من الكلمة اليونانية (skédasi)، والتي تعني (التشتت))؛ وبالتالي، يُفترض أن أخطاء التنبؤ متجانسة أو لها نفس التشتت. والبديل المخالف هو أن الأخطاء ليس لها نفس التباين أو التشتت؛ فهي متغايرة (غير متجانسة تشير إلى الاختلاف)(Hoffmann, 2021, p. 165).

وعادةً ما يتم تعريف التغايرية على أنها بعض الاختلاف في عبارة "تباين الخطأ غير الثابت (non-constant error variance)"، أو الفكرة القائلة بأنه بمجرد تضمين المتنبئات في نموذج الانحدار، يتغير تباين البواقي كدالة لشيء غير موجود في النموذج(Astivia & Zumbo, 2019, p. 1).

كما أن أحد الافتراضات المعيارية التي يقوم عليها النموذج الخطي؛ هو أن الأخطاء موزعة بشكل متماثل وبشكل مستقل (independently identically distributed) (i.i.d.). على وجه الخصوص، فعندما تكون الأخطاء موزعة بشكل متماثل وبشكل مستقل (i.i.d.)؛ فهي متجانسة (homoscedastic). أما إذا كانت الأخطاء ليست موزعة بشكل متماثل وبشكل مستقل (not i.i.d.)، ويفترض أن يكون لها توزيعات مع تباينات مختلفة؛ فيقال أن الأخطاء غير متجانسة (متغايرة) (heteroscedastic)(Klein et al., 2016, p. 568).

إن أحد افتراضات نموذج الانحدار هو تنوع متغير الاستجابة (response variable) حول سطح الانحدار (regression surface) –تباين الخطأ– في كل مكان هو نفسه:

$$V(\varepsilon) = V(Y \mid x_1, \ldots, x_k) = \sigma_\varepsilon^2$$

تباين الخطأ الثابت أحياناً يُطلق عليه مصطلح التجانس (homoscedasticity)، وبنفس المنطق تباين الخطأ غير الثابت يُطلق عليه مصطلح التغايرية (heteroscedasticity)(Fox, 2015, p. 301).

أثر التغايرية على نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

إن النتيجة الرئيسية للأخطاء المتغايرة هي أنه على الرغم من أن معاملات الانحدار، وفقًا للنظرية الإحصائية، غير متحيزة (unbiased)، إلا أنها غير فعالة (inefficient)، ومعاملات الانحدار غير الفعالة، عموماً غير دقيقة (imprecise) ولها أخطاء معيارية أكبر من معاملات الانحدار الفعالة. ونادرًا ما تُعرف قيمة أو درجة عدم الدقة، على الرغم من أنها تبدو شديدة بشكل خاص في العينات الصغيرة. ومع ذلك، نظرًا لتأثيرها على الأخطاء المعيارية (standard errors)؛ يمكن أن يؤثر ذلك على اختبار الدلالة الإحصائية (significance testing) حتى في العينات ذات الحجم المتوسط(Hoffmann, 2021, p. 166).

ولعقود من الزمن، تم التعرف على التغايرية في السلاسل الزمنية الاقتصادية والمالية. وإذا تجاهل الباحثون هذه المشكلة (التغايرية)؛ فقد ينتهي بهم الأمر بأساليب غير فعالة (inefficient)(Abdul-Hameed & Matanmi, 2021, p. 139).

كما أن أحد الافتراضات المهمة في نماذج الانحدار الخطي المتعددة هو أن تباين الأخطاء يجب أن يكون ثابتًا. وتحظى طريقة المربعات الصغرى العادية باهتمام كبير لدى ممارسي الإحصاء؛ لأنها توفر تقديرات فعالة وغير متحيزة للمعلمات عند استيفاء الافتراضات، وخاصة افتراض تماثل تباينات الخطأ (homoscedastic error variances). ولكن في العديد من تطبيقات الحياة الواقعية، تختلف تباينات الأخطاء عبر المشاهدات. نظرًا لأن التجانس غالبًا ما يكون افتراضًا غير واقعي، يجب على الباحثين النظر في كيفية تأثر النتائج بالتغايرية. وعلى الرغم من أن تقديرات طريقة المربعات الصغرى العادية تحافظ على عدم التحيز في وجود التغايرية، فإن تقديراتها تصبح غير فعالة(Onifade & Olanrewaju, 2020, p. 454)&(Su et al., 2012, p. 1).

كما يمكن ملاحظة العديد من الميزات المهمة المتعلقة بكيفية تأثير التغايرية على نموذج الانحدار:

(١) **التغايرية هي خاصية يحددها المجتمع (population-defined property)**؛ لن تختفي المشكلات التي تنشأ عن عدم التحكم في الأخطاء غير المتجانسة مع كبر حجم العينة بشكل كبير. وإذا كان هناك أي شيء، فقد تتفاقم المشاكل الناشئة عن تجاهلها لأن المصفوفات الموضحة في المعادلات (٢) أو (٣) سيتم تقديرها بشكل أفضل؛ مما يؤثر على الاستدلالات التي يمكن للفرد الحصول عليها من النموذج.

(٢) **لا تؤدي التغايرية إلى تحيز معاملات الانحدار**؛ لا شيء في تعريف التغايرية يتعلق بتقدير العينة الصغيرة لمعامل الانحدار نفسه. وتظل خصائص الاتساق وعدم التحيز على حالها إذا كان الافتراض الوحيد الذي يتم انتهاكه هو التغايرية.

(٣) **التغايرية تعمل على تحيز الأخطاء المعيارية وإحصاءات الاختبار**؛ فالأخطاء المعيارية لمعاملات الانحدار هي دالة لمصفوفة (التباين–التغاير) لأجزاء الخطأ ومصفوفة (التباين–التغاير) للمتنبئات، إذا تم افتراض $\sigma_{\varepsilon}^{2}I$ ولم يكن ذلك صحيحًا في المجتمع؛ فستكون الأخطاء المعيارية الناتجة صغيرة جدًا وستكون فترات الثقة ضيقة جدًا لرفض الفرضية الصفرية بدقة عند مستوى ألفا المحدد مسبقًا (على سبيل المثال

(0.05))؛ ينتج عن هذا تضخم في معدلات الخطأ من النوع الأول (Type I error).

(٤) لا تؤثر التغايرية على ملاءمة النموذج (model fit) ولكنها تؤثر على الشك المحيط به (uncertainty)؛ في سياق انحدار (OLS)، يتم استخدام معامل التحديد R^2 عادةً لتقييم مدى ملاءمة النموذج، لا تتأثر هذه الإحصائية أيضًا بالتغايرية، ولكن $F-test$ المرتبط بها هو الذي يتأثر (Astivia & Zumbo, 2019, pp. 2-3).

وبالرغم من أن مُقَدّر المربعات الصغرى (least-squares estimator) غير متحيز ومتسق عندما يكون تباين الخطأ غير ثابت؛ إلا أن فعالية مُقَدَّر المربعات الصغرى (least-squares estimator) تكون ضعيفة، والصيغ العادية لمعامل الخطأ المعياري (coefficient standard errors) تكون غير دقيقة، وتعتمد درجة المشكلة على أنه بأي درجة تختلف تباينات الخطأ، وعلى حجم العينة، وعلى ترتيب قيم المتغيرات المتنبئة (X-values) في الانحدار(Fox, 2015, p. 301).

كما أن انتهاك افتراض التجانس في طريقة المربعات الصغرى للنماذج الانحدارية لا يؤثر على معاملات الانحدار، لكنها تؤثر على دقة الأخطاء المعيارية (وبالتالي، فترات الثقة واختبارات الدلالة الإحصائية)(Brown, 2014, p. 228).

كما أن التغايرية لها العديد من التبعات أو العواقب منها: (١) لا تغير التغايرية خصائص عدم التحيز والاتساق لمُقَدَّرات المربعات الصغرى (OLS)، (٢) لكن مُقَدَّرات المربعات الصغرى (OLS) لم تعد ذات حد أدنى من التباين أو الكفاءة؛ أي أنها ليست أفضل مُقَدَّر خطي غير متحيز (best linear unbiased estimators (BLUE))؛ ولكن هي ببساطة مُقَدَّرات خطية غير متحيزة (linear unbiased estimators (LUE))، (٣) نتيجة لذلك؛ قد لا يكون الاختباران (t and F tests) القائمان على الافتراضات المعيارية لنموذج الانحدار الخطي التقليدي موثوقًا بهما؛

مما يؤدي إلى استنتاجات خاطئة فيما يتعلق بالدلالة الإحصائية لمعاملات الانحدار المُقَدَّرة، (٤) في حالة وجود التغايرية، يتم توفير أفضل مُقَدَّر خطي غير متحيز (best linear unbiased estimators (BLUE)) بطريقة المربعات الصغرى الموزونة (weighted least squares (WLS)). بسبب هذه التبعات أو العواقب، فمن المهم أن نتحقق من التغايرية(Gujarati, 2011, pp. 82-83).

انتهاك افتراض التجانس في طريقة المربعات الصغرى العادية والوقوع في التغايرية:

لقد تم استخدام المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least (OLS) Squares) على نطاق واسع كأداة استنتاجية في الانحدار على مر السنين، وتتمتع (OLS) ببعض الصفات الإيجابية في ظل الافتراضات العادية؛ تجانس تباينات الخطأ (homoscedasticity) هو أحدها، ومُقَدَّرات (OLS) لها خاصية التباين الأدنى؛ أي أن $E(\mu_i^2)=\sigma^2, i=1,2,\dots,n$ ، ومع ذلك، هناك أوقات يتم فيها انتهاك افتراض تجانس تباينات الخطأ. وعند النظر إلى مقطع عرضي من المؤسسات في صناعة واحدة، على سبيل المثال، قد تحتوي أجزاء الخطأ المرتبطة بالشركات الكبيرة جدًا على تباين أكبر من أجزاء الخطأ المرتبطة بالشركات الأصغر. وتُعرف هذه الحالة باسم الأخطاء التغايرية عندما يتغير تباين الخطأ(Abdul-Hameed & Matanmi, 2021, p. 139).

وتتضمن كل مقدمة تقريبًا في انحدار المربعات الصغرى العادية (OLS) نظرة عامة على الافتراضات الكامنة وراء هذه الطريقة للتأكد من أن الاستنتاجات التي تم الحصول عليها منها مبررة، من صيغة الدالة الخاصة بالنموذج إلى الافتراضات التوزيعية للأخطاء وأكثر من ذلك، وهناك افتراض واحد محدد، على الرغم من أنه مفهوم جيدًا في الأدبيات الاقتصادية والإحصائية، إلا أنه لم يحظ بالضرورة بنفس المستوى من الاهتمام في علم النفس وباقي العلوم السلوكية والنفسية الأخرى؛ هو

افتراض التغايرية (the assumption of homoscedasticity)(Astivia & Zumbo, 2019, p. 1).

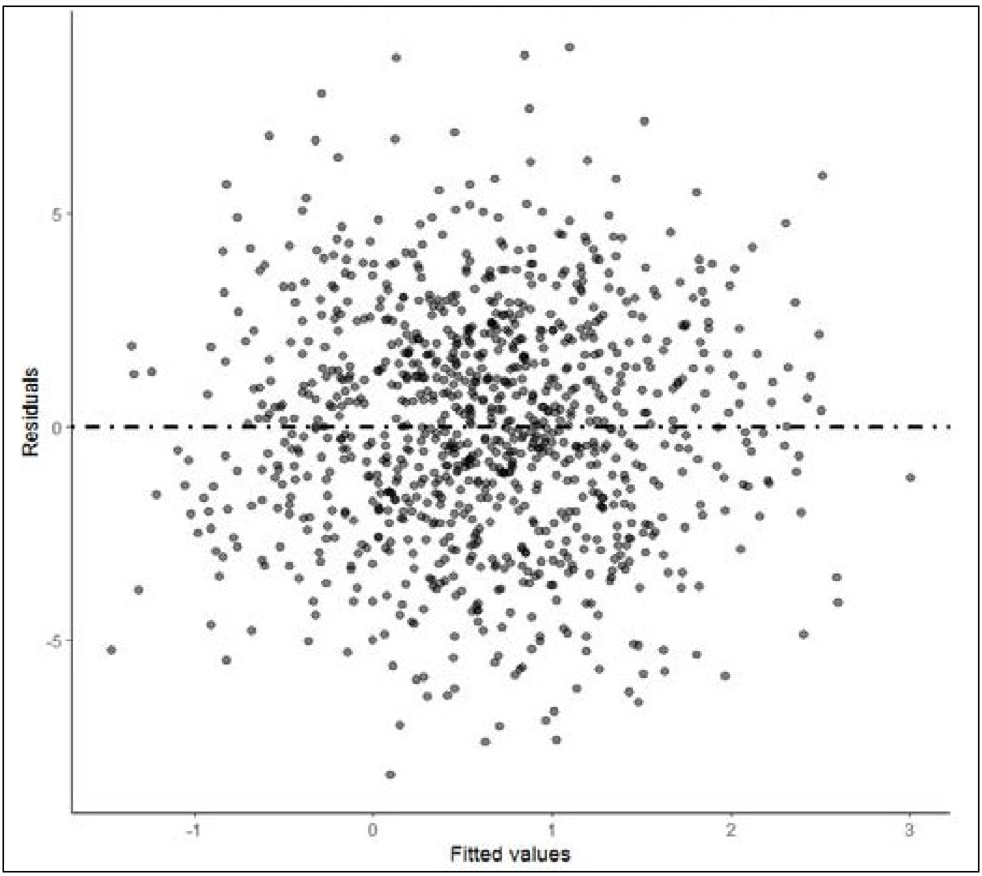
وكقاعدة عامة، يتم بناء نموذج الانحدار الخطي بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS). وتعتمد هذه الطريقة لتقدير المعلمات غير المعروفة على تقليل مجموع مربعات أخطاء النموذج. وتُعرف مُقَدَّرات معلمات النموذج التي يحددها (OLS) بأنها أفضل مُقَدَّرات خطية غير متحيزة (BLUE) (best linear unbiased estimators) (Malyarets et al., 2018, p. 545).

ويتطلب تطبيق (OLS) تحقيق عدد من الشروط؛ فقط إذا تم استيفاء هذه الشروط، فإن التقديرات المحسوبة بواسطة هذا النموذج ستكون غير متحيزة وفعالة ومميزة (BLUE). وتمت صياغة هذه الشروط في شكل نظرية جاوس ماركوف (Gauss – Markov theorem). وفقًا لهذه النظرية، هناك أربعة افتراضات رئيسية تعترف باستخدام نماذج الانحدار الخطي للبحث والتنبؤ؛ أحدها هو التجانس (التباين الثابت) للأخطاء فيما يتعلق بأي متغير مستقل(Malyarets et al., 2018, p. 546).

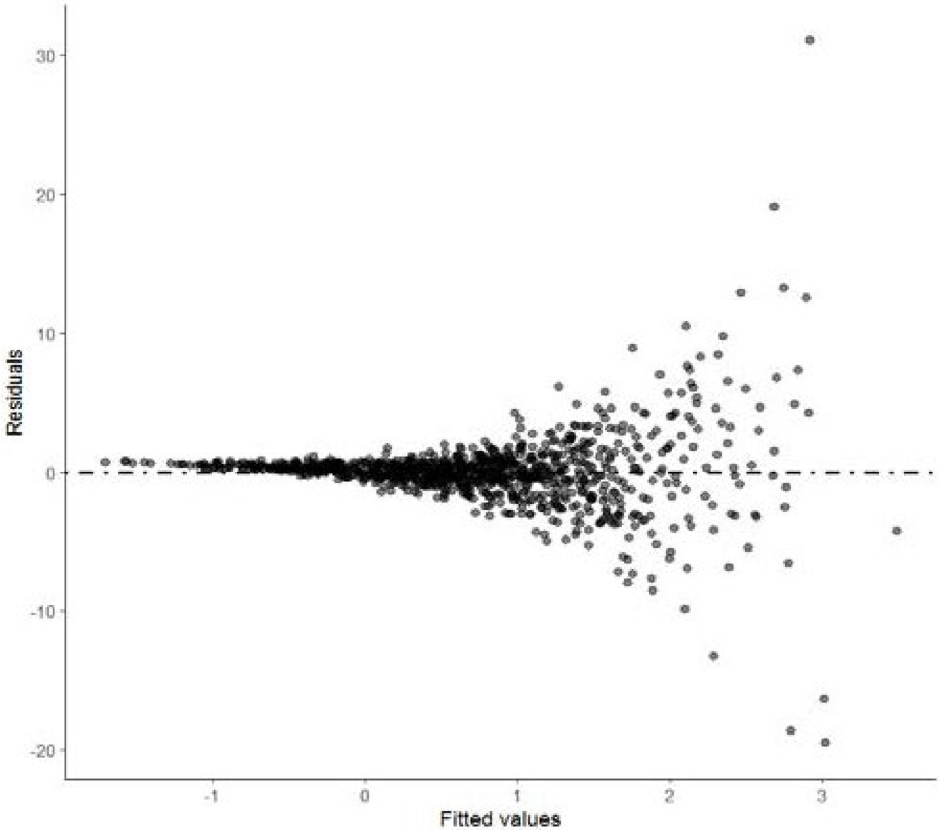
كشف وتقييم وتشخيص التغايرية من خلال الرسوم البيانية:

بعد تقدير النموذج، يتم الاعتماد على رسمين بيانيين توفرهما دالة الرسم في برنامج (R) الرسم البياني الأول يرسم البواقي (residuals) على المحور الرأسي مقابل القيم الملائمة (fitted values) على المحور الأفقي. والرسم البياني الثاني؛ والذي يسمى مخطط (Scale-Location plot)، ويرسم الجذر التربيعي للقيمة المطلقة للبواقي على المحور الرأسي والقيم الملائمة على المحور الأفقي. ويتم التعرف على الأخطاء التغايرية (homoscedasticity errors) عن طريق قيم البواقي العظمى عند النقاط العليا بطول المحور السيني(Hoffmann, 2021, p. 170).

وبالنسبة لنماذج الانحدار (OLS)، فإن التوصية المعتادة التي تمت الدعوة لها في الكتب المتخصصة التمهيدية لكشف التغايرية هي رسم بواقي العينة (sample residuals) مقابل القيم الملائمة (fitted values) ومعرفة ما إذا كان هناك "نمط" "pattern" فيها أم لا. فإذا بدا الرسم البياني وكأنه سحابة من الضوضاء العشوائية بدون نمط (cloud of random noise with no pattern)؛ فمن المرجح أن يتحقق افتراض التجانس (homoskedasticity) كما بالشكل (١). وإذا تم اكتشاف أي نوع من التكتل أو الاتجاه (clustering or trend)؛ فإن الافتراض مشكوك فيه ويحتاج إلى مزيد من التقييم كما يظهر بالشكل (٢)(Astivia & Zumbo, 2019, (pp. 4-5.



شكل (١) تحقق افتراض التجانس (homoskedasticity)



شكل (٢) عدم تحقق افتراض التجانس (التغايرية) (heteroskedasticity)

وتعد الأساليب الرسومية للكشف عن افتراضات النموذج مفيدة جدًا؛ لفهم البيانات بشكل كامل والتعرف على بعض خصائصها الجوهرية. ومع ذلك، فهي لا تزال تعتمد على الاستدلال الإدراكي الذي قد لا يلتقط بالضرورة التعقيد الكامل للظواهر التي تتم دراستها أو قد يؤدي بالباحث إلى الضلال إذا شعر أن نمطًا أو اتجاهًا قد تم اكتشافه في حين أنه لا يوجد أي شيء.(Astivia & Zumbo, 2019, p. 5)

لذلك فإن تشخيص التغايرية ليس أمرًا تافهًا؛ لأنه سواء كان الفرد يعتمد على أدوات رسومية أو مداخل إحصائية رسمية، يُفترض دائمًا نموذج يولد الاختلافات في التباينات وإذا كان هذا النموذج لا يتوافق مع ما يتم اختباره، فقد يفترض الفرد بشكل

غير صحيح أن التجانس موجود في حين أنه لا يكون كذلك(Astivia & Zumbo, 2019, p. 7).

كشف وتقييم وتشخيص التغايرية من خلال الاختبارات الإحصائية المختلفة والمحك المستخدم للمقارنة:

هناك العديد من الاختبارات المختلفة للتغايرية؛ على سبيل المثال؛ الاختبار الرسومي (graphical test)، واختبار باركر (Parker test)، واختبار ارتباط الرتبة لسبيرمان (Spearman's rank correlation test)، واختبار جليجسر (Glejser test)، واختبار وايت (White test)، واختبار (G-Q test) وما إلى ذلك(Jiang & Deng, 2021, p. 400).

ويوفر الرسمان البيانيان طريقة لتصور قيم البواقي، وتقييم ما إذا كانت تتبع نمطًا متجانساً أو مغايرًا، ولكن، تتوفر أيضًا العديد من الاختبارات الرقمية (numeric tests)؛ نظراً لقيود الأساليب الرسومية كصعوبة استخدامها مع مجموعات البيانات الكبيرة؛ لذا فإن التقنيات البديلة لتشخيص عدم التجانس أو تغايرية الأخطاء تكون مفيدة(Hoffmann, 2021, p. 172).

وقدم (Astivia & Zumbo, 2019, pp. 5-6) ثلاثة اختبارات إحصائية مختلفة مشتقة من أدبيات الاقتصاد القياسي والتي نادرًا ما تُستخدم في علم النفس أو العلوم الاجتماعية من أجل استكمال استكشاف انتهاكات الافتراض داخل إطار انحدار المربعات الصغرى (OLS)؛ **الاختبار الأول** وربما الأكثر كلاسيكية هو اختبار (Breusch – Pagan test)، **والاختبار الثاني** المهم هو اختبار (White test) ويبحث في صيغ الدوال غير الخطية وذات الرتب الأعلى للجزء التنبؤي X، **والاختبار الأخير** هو اختبار (Breusch-Godfrey test)، والذي يحاول اكتشاف ما إذا كانت الصفوف المتتالية في البيانات مرتبطة أم لا(Astivia & Zumbo, 2019, pp. 5-6).

واقترح (Klein et al., 2016, pp. 572-573) مقياساً إحصائياً لقياس الأخطاء التغايرية في النماذج الخطية الانحدارية؛ وهذا المقياس مقياس بسيط للتغايرية، والذي لا يحتاج إلى نموذج معلمي وقادر على اكتشاف الأجزاء غير الخطية المحذوفة (omitted nonlinear terms). ويستخدم هذا المقياس تشتت مربعات بواقي الانحدار (squared regression residuals)، ويحسب من خلال:

$$h_{het} := \sqrt{\frac{n}{24}}(\hat{\gamma}-3); \quad \hat{\gamma} = \frac{n^{-1}\sum e_i^4}{(n^{-1}\sum e_i^2)^2}-1$$

حيث إن e هو بواقي الانحدار، n هي حجم العينة.

وتُستخدم قيمة الاحتمالية (قيمة p) كمحكات لمقارنة الطرق التي تُستخدم للكشف عن التغايرية.

ويذكر (Abdul-Hameed & Matanmi, 2021, p. 142) أنه تم حساب قيمة الاحتمالية (قيمة p) لجميع إحصائيات الاختبار واستخدامها لتحديد أي من إحصائية الاختبار يتفوق على الآخر.

وتمثل قيمة (P-Value) احتمال حدوث اختلاف ملحوظ عن طريق الصدفة العشوائية، إنه احتمال الحصول على أي قيمة في أقصى منحنى التوزيع الاحتمالي، كلما انخفضت قيمة (P-Value)، كلما زاد الفرق الإحصائي بين العينتين.(Das & Das, 2023, p. 1).

سيناريوهات التعامل مع التغايرية (fixing heteroskedasticity) والمحكات المستخدمة لترتيب أفضلية السيناريوهات:

للتقليل من الأخطاء التغايرية، فإن الأسلوب المفضل لضبط أحجام العينات المختلفة هو استخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) (Weighted Least Squares) (Hoffmann, 2021, p. 177).

وإذا لم تكن أخطاء النموذج عشوائية بحتة؛ فيجب اتخاذ مزيد من الإجراءات لفهم أو تصحيح مصدر التبعية هذا. وفي بعض الأحيان يمكن تحديد هذه التبعية بسهولة،

مثل وجود التجميع داخل إطار عمل نمذجة متعدد المستويات أو في تحليل المقاييس المتكررة. وفي كل حالة؛ هناك ميزة غريبة لتصميم البحث تجعل كل ملاحظة أكثر ارتباطًا بالآخرين مما قد يصفه النموذج على سبيل المثال؛ إذا كان الفرد يجري دراسة لنتائج اختبار الرياضيات في مدرسة معينة، فمن المحتمل جدًا أن ينتج الطلاب الذين يحضرون دروسًا في نفس الفصل الدراسي أو يتم تدريسهم من قبل نفس المعلم درجات أكثر تشابهًا من درجات الطلاب من فصل دراسي مختلف أو الذين يتم تعليمهم من قبل مدرس مختلف. بالنسبة للتحليلات الطولية؛ من الواضح أن قياس نفس المشاركين عدة مرات يخلق تبعيات من خلال حقيقة بسيطة مفادها أن نفس الأشخاص يتم تقييمهم بشكل متكرر. ومع ذلك، هناك أوقات تكون فيها ميزات التصميم هذه إما غير موجودة بشكل صريح أو يصعب تحديدها، وعلى الرغم من إمكانية اكتشاف تأثير التغايرية، قد يكون الإجراء في الحالات المذكورة أكثر تعقيدًا وقد لا يكون علماء الاجتماع على دراية بجميع الأدوات المنهجية المتاحة لهم لمعالجة أنظمة الخطأ غير المتجانسة(Astivia & Zumbo, 2019, pp. 1-2).

وقدم (Astivia & Zumbo, 2019, p. 7&9) مدخلين متمايزين قائمين على المبادئ الإحصائية لاستيعاب هذا التباين غير الثابت (التغايرية)، مع القليل جدًا من المدخلات، ويمكن أن يؤدي هذا بشكل أساسي إلى استنتاجات أكثر ملاءمة وتغيير قليل جدًا في طريقة تحليل تفسير نماذج الانحدار. المدخل الأول؛ هو الأخطاء المعيارية المتسقة المتغايرة (heteroskedastic-consistent standard errors) المعروفة أيضًا باسم (White standard errors, Huber-White standard errors, robust standard errors, sandwich estimators) والتي تعترف أساسًا بوجود التباين غير الثابت وتقديم مدخل بديل لتقدير التباين في معاملات انحدار العينة، المدخل الثاني يعرف باسم (wild bootstrap) وتم اقتراحه في الاقتصاد القياسي.

ويوفر انحدار المربعات الصغرى الموزونة (WLS) (Weighted-least- squares) نهجًا بديلاً عن الأدوات الرسومية للتقدير في وجود تباين خطأ غير ثابت (التغايرية)(Fox, 2015, p. 304).

ولحسن الحظ، يمكن أن تساعد الأساليب الموجودة بالفعل في كثير من الأحيان؛ فعلى سبيل المثال؛ يمكن أن يؤدي تحويل (Box-Cox transformation) أو تحويلات (Tukey's ladder of transformations) في بعض الأحيان إلى إحداث تباينات ثابتة تقريبًا. ويمكن أن تكون طرق الانحدار القوية (Robust regression) أقل حساسية للتباين غير الثابت من الطرق التقليدية. كما أن طريقة المربعات الصغرى الموزونة (Weighted least squares)، وطريقة انحدار المربعات الصغرى المعممة الممكنة (feasible generalized least squares regression)، والنماذج الخطية المعممة (generalized linear models) كلها طرق يمكن للفرد أن يتعامل معها مع التباين غير الثابت (التغايرية)(Barker & Shaw, 2015, p. 538).

ونظراً لأن التغايرية تؤثر على الأخطاء المعيارية (standard errors) ولا تؤثر على معاملات الانحدار؛ نستطيع التغلب على هذا الانتهاك باستبدال مصفوفة التغاير الأصلية بمصفوفة الأخطاء المعيارية المتسقة التغايرية (heteroskedastic-consistent standard errors (HCCM))، وقام (Long & Ervin) بتعديل هذه المصفوفة تعديلاً طفيفاً يسمح بالتعامل مع العينات صغيرة الحجم لتكون (HC3):

$$HC3 = (X'X)^{-1} X' \mathrm{diag}\left[\frac{e_i^2}{(1-h_{ii})^2}\right] X (X'X)^{-1};$$

$$h_{ii} = x_i'(X'X)^{-1} x_i$$

حيث أن X هي مصفوفة المتغيرات المشاهدة، h_{ii} هو (leverage values)، e_i^2 هي مربعات قيم البواقي الناتجة من تحليل بطريقة المربعات الصغرى العادية

Brown, 2014, p.)&(Hayes & Cai, 2007, p. 713)(OLS) .(Long & Ervin, 2000, p. 7)&(241

ويُستخدم الخطأ المعياري وفترات الثقة كمحكات لترتيب أفضلية السيناريوهات التي تُستخدم للتغلب على التغايرية.

والخطأ المعياري هو أحد الأدوات الرياضية المستخدمة في الإحصاء لتقدير التباين، يتم اختصاره لـ(SE). والخطأ المعياري للإحصاء أو تقدير المعلمة هو الانحراف المعياري لتوزيع العينات. ويمكننا تعريفه على أنه تقدير لهذا الانحراف المعياري. (Musselwhite & Wesolowski, 2018, p. 2)

ويتم بناء فترات الثقة عن طريق الخطأ المعياري في القياس. وفي ظل افتراضات التوزيع الطبيعي، فإنه يكون في ٦٨٪ من الحالات، تقع الدرجات الحقيقية ضمن خطأ معياري واحد في القياس أعلى أو أقل من المتوسط (±١). بعد ذلك، في ٩٦٪ من الحالات، تقع الدرجات الحقيقية ضمن خطأين معياريين في القياس أعلى أو أقل من المتوسط (±٢). وأخيرًا، في ٩٩.٧٪ من الحالات، تقع الدرجات الحقيقية ضمن ثلاثة أخطاء معيارية في القياس أعلى أو أقل من المتوسط (±٣). (Musselwhite (& Wesolowski, 2018, p. 4

الدراسات السابقة:

أولاً: الدراسات التي تناولت متغير التغايرية:

دراسة (Jiang & Deng, 2021): لمعالجة عيوب اختبار باركر التقليدي في النماذج الخطية متعددة المتغيرات: العملية مرهقة ومكثفة حسابيًا، نقترح اختبار جديد لعدم تساوي التباين. يُقترح اختبار جديد لعدم تساوي التباين باستخدام القيم الملائمة للعينات كمتغيرات تفسيرية جديدة، وإعادة بناء نموذج الانحدار، وإعطاء اختبار جديد لعدم تساوي التباين بناءً على اختبار الدلالة الإحصائية للمعاملات، كما تتم مقارنته أيضًا باختبار باركر الحالي الذي تم تحسينه باستخدام فكرة المكون الرئيسي. تظهر

المحاكاة العددية والتحليلات التجريبية أن اختبار باركر المحسن مع القيم الملائمة للعينات المقترحة في هذا البحث متفوق عن اختبار باركر التقليدي.

دراسة (Abdul-Hameed & Matanmi, 2021): التغايرية هي مشكلة تنشأ في تحليل الانحدار لمجموعة متنوعة من الأسباب. تؤثر هذه المشكلة على كل من إجراءات التقدير وإجراءات الاختبار، وبالتالي فمن الأهمية بمكان أن تكون قادرًا على اكتشاف المشكلة ومعالجتها. يعد وجود القيم المتطرفة حدثًا منتظمًا في تحليل البيانات، كما أن اكتشاف التغايرية في وجود القيم المتطرفة يمثل الكثير من الصعوبة بالنسبة لمعظم الطرق الحالية. في هذه الورقة، تم اقتراح اختبار (Breusch-Pagan) المعدل للتغايرية في وجود القيم المتطرفة. يتم الحصول على الاختبار المعدل عن طريق استبدال المكونات غير القوية (non-robust components) في اختبار (Breusch-Pagan) بإجراءات قوية تجعل اختبار (Breusch-Pagan) المعدل غير متأثر بالقيم المتطرفة. تم استخدام محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo simulations) ومجموعات البيانات الحقيقية للتحقق من أداء الاختبار المقترح حديثًا. تم حساب القيمة الاحتمالية (p – value) وقوة جميع الطرق التي تم تناولها في هذه الدراسة، وتشير النتائج إلى أن النسخة القوية المعدلة من اختبار (Breusch-Pagan) تفوقت بشكل كبير على الاختبارات السابقة؛ لذلك يوصى باختبار (Breusch-Pagan) المعدل المقترح لاختبار التغايرية في تشخيص الانحدار الخطي، خاصةً عندما تحتوي مجموعات البيانات بوضوح على قيم متطرفة.

دراسة (Onifade & Olanrewaju, 2020): في نموذج الانحدار الخطي، يعد اختبار انتظام تباين القيم المتبقية (البواقي) جزءًا لا يتجزأ من التحليل الإحصائي. هذا افتراض حاسم يتطلب تأكيدًا إحصائيًا من خلال استخدام بعض الاختبارات الإحصائية في الغالب قبل تنفيذ تقنية تحليل التباين (ANOVA). نشر العديد من الباحثين الأكاديميين سلسلة من الأوراق (المقالات) حول بعض الاختبارات لاكتشاف

افتراض التباين في نماذج الانحدار الخطي المتعددة. تم إجراء العديد من المقارنات في هذه الاختبارات باستخدام تقنيات إحصائية مختلفة مثل التحيزات (Biases) ومعدلات الخطأ (error rates) وكذلك القوى (powers). إلى جانب المقارنات، تم الإبلاغ عن تعديلات في بعض هذه الاختبارات الإحصائية للكشف عن تغايرية التباين في بعض الأدبيات في السنوات الأخيرة. في حالة الانحدار الخطي المتعدد، لم يتم القيام بالكثير من العمل لمقارنة بعض الاختبارات الإحصائية المختارة لافتراض التجانس عندما يتم ضم الأشكال الخطية والتربيعية والجذر التربيعي والأسي في القيم المتبقية (البواقي). نتيجة لهذه الحقيقة، تعتزم الدراسة الحالية العمل على نطاق واسع في جميع مجالات الاهتمام هذه بهدف سد الفجوة. تهدف الورقة إلى تقديم تحليل مقارن شامل للسلوك المقارب لبعض الاختبارات الإحصائية المختارة لافتراض التماثل من أجل البحث عن أفضل اختبار إحصائي للكشف عن التغايرية في سيناريو الانحدار الخطي المتعدد مع تباينات ومستويات دلالة مختلفة. في الأدبيات، تتوفر عدة اختبارات للتجانس، ولكن تسعة فقط وهي (Breusch-Godfrey test)، (studentized Breusch-Pagan test)، (White's test)، (Nonconstant Variance Score test)، (Park test)، (Spearman Rank)، (Glejser test)، (Goldfeld-Quandt test)، (Harrison-McCabe test) والتي تم النظر فيها بهذه الدراسة؛ وذلك بهدف فحصها من خلال محاكاة مونت كارلو. ومع ذلك، تم ضم (حقن) أربعة أشكال مختلفة من أشكال التغايرية هي: الأسي والخطي (تعميم الأشكال التربيعية والجذر التربيعي) في جزء البواقي من نماذج الانحدار الخطي المتعددة في فئات مختلفة من أحجام العينات (30,50,100,200,500,1000)، تم إجراء تقييمات للأداء داخل بيئة برنامج (R). من بين النتائج الأخرى، كشفت استقصاءاتنا أن اختبارات (Glejser test) و (Park test) أعادت أفضل اختبار لتوظيفه للتحقق من التغايرية في (Linear

(Linear Heteroscedastic Structure (LHS)) و (Exponential Heteroscedastic Structure (EHS)) على التوالي، كما أعادت اختبارات (White and Harrison-McCabe tests) أفضل اختبار لتوظيفه للتحقق من وجود التجانس في(Linear Heteroscedastic Structure (LHS)) و (Exponential Heteroscedastic Structure (EHS)) على التوالي، في حجم العينة أقل من ٥٠.

دراسة (Liu & Vasnev, 2019): لتجنب مخاطر التخصيص الخاطئ بين النماذج المتجانسة وغير المتجانسة؛ نقترح طريقة تجميعية تعتمد على المربعات الصغرى العادية (OLS) والمربعات الصغرى المعممة (GLS). لتحديد الأوزان المثلى للمجموعة؛ نقترح معيارين للمعلومات ونقترح إصدارات مجدية تعمل حتى عندما تكون مصفوفة التباين والتغاير غير معروفة. تم إثبات أمثلية الطريقة في ظل بعض الشروط المنتظمة. تُظهر نتائج محاكاة مونت كارلو أن الطريقة تكيفية؛ بمعنى أنها تحقق تقريبًا نفس دقة التقدير كما لو كانت التماثلية أو التغايرية لمصطلح الخطأ معروفتين.

دراسة (Astivia & Zumbo, 2019): في علم النفس والعلوم الاجتماعية، يعد انحدار المربعات الصغرى العادية (OLS) أحد أكثر التقنيات شيوعًا لتحليل البيانات. من أجل التأكد من أن الاستنتاجات من استخدام هذه الطريقة مناسبة، يجب استيفاء عدة افتراضات، بما في ذلك تباين الخطأ الثابت (أي التجانس). يقتصر معظم التدريب الذي تلقاه علماء العلوم الاجتماعية فيما يتعلق بالتجانس على العروض الرسومية للكشف وتحويلات البيانات كإجراء للحل؛ مما يعطي القليل من سبل الانتصاف إذا لم ينجح أي من هذين النهجين. يُستعار هذا البرنامج التعليمي من أدبيات الاقتصاد القياسي، ويهدف إلى تقديم وصف واضح لماهية التغايرية (heteroskedasticity)، وكيفية قياسها من خلال الاختبارات الإحصائية المصممة

لها وكيفية معالجتها من خلال استخدام الأخطاء المعيارية المتسقة والمتغايرة وتقنية البوتوستراب (heteroskedastic-consistent standard errors and the wild bootstrap). يتم تقديم حل خطوة بخطوة للحصول على هذه الأخطاء في (SPSS) دون الحاجة إلى تحميل وحدات ماكرو إضافية (additional macros) أو بناء جملة (syntax.). يتم التركيز على حقيقة أن تباين الخطأ غير الثابت (non-constant error variance) هو سمة محددة تعتمد على المجتمع وتعتمد على النموذج ويمكن أن تنشأ أنواع مختلفة من التغايرية اعتمادًا على ما يرغب المرء في افتراضه بشأن البيانات.

دراسة (Malyarets et al., 2018): يناقش المقال مشكلة التغايرية والتي يمكن أن تنشأ في عملية حساب النماذج الاقتصادية القياسية ذات الأبعاد الكبيرة وطرق التغلب عليها. تشوه التغايرية قيمة الانحراف المعياري الحقيقي لأخطاء التنبؤ. يمكن أن يصاحب ذلك زيادة ونقصان في فترة الثقة (confidence interval). قدمنا مبادئ تنفيذ الاختبارات الأكثر شيوعًا التي تستخدم للكشف عن التغايرية في بناء نماذج الانحدار الخطي، وقارننا حساسيتها. أحد إنجازات هذه الورقة هو أن البيانات التجريبية الحقيقية استخدمت لاختبار التغايرية. الهدف من هذه المقالة هو اقتراح تنفيذ وإجراء للعديد من الاختبارات المستخدمة للتحقق من التغايرية في نماذج الانحدار متعددة العوامل باستخدام برنامج (MATLAB). لهذا الغرض، قمنا بتعديل عدد قليل من الخوارزميات المفتوحة لتنفيذ الاختبارات المعروفة على التغايرية. أجريت الدراسات التجريبية للتحقق من صحة البرامج المقترحة لمختلف نماذج الانحدار الخطي. النماذج المستخدمة للمقارنة هي نماذج من قسم الرياضيات العليا والطرق الرياضية في الاقتصاد بجامعة (Simon Kuznets Kharkiv National University) للاقتصاد ونماذج الاقتصاد القياسي التي تم نشرها مؤخرًا من قبل المجلات الرائدة.

دراسة (Klein et al., 2016): أحد الافتراضات لتحليل الانحدار المتعدد هو تجانس الأخطاء. قد تنجم التغايرية، كما هو موجود غالبًا في البيانات النفسية أو السلوكية، عن التحديد الخاطئ بسبب الأجزاء المتنبئة غير الخطية (nonlinear predictor terms) التي تم التغاضي عنها أو إلى المتنبئات غير الملاحظة وغير المتضمنة في النموذج. على الرغم من وجود طرق لاختبار التغايرية، إلا أنها تتطلب نموذجًا معلمياً لتحديد بنية التغايرية (structure of heteroscedasticity). الهدف من هذه المقالة هو اقتراح مقياس بسيط للتغايرية، والذي لا يحتاج إلى نموذج معلمي وقادر على اكتشاف الأجزاء غير الخطية المحذوفة (omitted nonlinear terms). يستخدم هذا المقياس تشتت مربعات بواقي الانحدار (squared regression residuals). تظهر دراسات المحاكاة أن المقياس يعمل بشكل مرضٍ فيما يتعلق بمعدلات الخطأ من النوع الأول والقوة (Type I error rates and power) عندما يكون حجم العينة وحجم التأثير كبيرًا بدرجة كافية. وهو يتفوق على اختبار (Breusch-Pagan test) عندما يتم حذف الجزء غير الخطي في نموذج التحليل. نعرض أيضًا أداء المقياس باستخدام مجموعة بيانات من علم النفس الصناعي (industrial psychology).

دراسة (Barker & Shaw, 2015): يتم تعريف القيم المتبقية (البواقي) من نموذج انحدار المربعات الصغرى على أنها المشاهدات مطروحًا منها القيم النموذجية. لكي ينتج انحدار المربعات الصغرى قيم صالحة من حيث فترات الثقة (CIs) والدلالة الإحصائية (P values)، يجب أن تكون القيم المتبقية مستقلة، وموزعة بشكل طبيعي، ولها تباين ثابت. إذا لم يتم استيفاء هذه الافتراضات، يمكن أن تكون التقديرات متحيزة ويمكن أن تقل القوة الإحصائية. ومع ذلك، هناك طرق لتقييم هذه الافتراضات والخطوات التي يمكن للفرد اتخاذها في حالة انتهاك الافتراضات. هنا، نناقش كلاً من التقييم والاستجابات المناسبة لانتهاك الافتراضات.

دراسة **(Hayes & Cai, 2007):** يعد التجانس (homoskedasticity) أحد الافتراضات المهمة في انحدار المربعات الصغرى العادية (OLS). على الرغم من أن مُقَدَّر معلمات الانحدار في انحدار المربعات الصغرى العادية غير متحيز عند انتهاك افتراض التجانس؛ فإن مُقَدَّر مصفوفة التباين لتقديرات المعلمات يمكن أن يكون متحيزًا وغير متسق في ظل التغايرية؛ مما قد ينتج عنه دلالة اختبارية مشكوك فيها وفترات ثقة متحفظ عليها. بعد وصف موجز للتغايرية وتأثيراتها على عملية الاستدلال في انحدار المربعات الصغرى (OLS)؛ نناقش مجموعة من مُقَدَّرات الخطأ المعيارية المتسقة مع التغايرية لانحدار (OLS) ونقيم الحُجَّة بأنه يجب على الباحثين استخدام أحد هذه المُقَدَّرات بشكل روتيني عند إجراء اختبارات الفرضيات باستخدام انحدار (OLS)؛ لتسهيل اعتماد هذه التوصية؛ نقدم وحدات ماكرو سهلة الاستخدام لبرامج (SPSS-SAS)؛ لتنفيذ الإجراءات التي تمت مناقشتها هنا.

فروض البحث: في ضوء الإطار النظري والدراسات السابقة تمت صياغة فروض البحث على النحو التالي:

١- لا يختلف شكل البيانات ذات الأخطاء التغايرية عن شكل البيانات ذات الأخطاء الثابتة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

٢- لا تختلف دقة الكشف عن الأخطاء التغايرية باختلاف الطريقة المستخدمة للكشف عنها في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الدلالة الإحصائية.

٣- جميع السيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الخطأ المعياري على درجة واحدة من الأفضلية.

٤- لا تختلف حدود فترات الثقة الدنيا والعليا (عند مستوى ثقة ٩٥٪ & ٩٩٪) لمعاملات الانحدار في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً للسيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية.

منهج البحث وإجراءاته: تم استخدام المنهج الوصفي المعتمد على توليد البيانات (أسلوب المحاكاة (مونت كارلو))، وتم توليد **مجموعتين** من البيانات باستخدام برنامج (R Core Team, 2023) عدد كل مجموعة يساوي (١٠٠٠) (n=1000)، وفيما يلي نقدم وصفاً للبيانات المولدة داخل كل مجموعة:

المجموعة الأولى: وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء الثابتة**، وتُشتق من نموذج الانحدار الخطي المتعدد والذي يحتوي على ثلاثة متغيرات؛ منها متغيران تفسيريان أو متنبئان (x2 &x3)، وتم توليدهما من دالة المنحنى الاعتدالي بمتوسط (-1.4 & 3) وانحراف معياري (2 & 1) على الترتيب، والمتغير التابع (y) تم توليده عن طريق إضافة قيمة من الخطأ (eps) والتي تم توليدها من دالة المنحنى الاعتدالي بمتوسط (0) وانحراف معياري ($\sqrt{2}$) إلى ($X\%*\%bvec$) لتصبح قيمة (y) تساوي ($y = X\%*\%bvec + eps$)، حيث أن (X) هي مصفوفة المتغيرات التفسيرية أو المتنبئة، ($bvec$) متجه معاملات الانحدار والذي يحتوي على (الجزء المقطوع b_0، الميل الخاص بالمتغير الأول b_1، الميل الخاص بالمتغير الثاني b_2) وقيمه تساوي (1.2, 2, 0.8) على الترتيب.

المجموعة الثانية: وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء التغايرية**، وتُشتق من نموذج الانحدار الخطي المتعدد والذي يحتوي على ثلاثة متغيرات؛ منها متغيران تفسيريان أو متنبئان (x2 &x3)، وتم توليدهما من دالة المنحنى الاعتدالي بمتوسط (-1.4 & 3) وانحراف معياري (2 & 1) على الترتيب، والمتغير التابع (y1) تم توليده عن طريق إضافة قيمة من الخطأ (eps1) والتي تم توليدها من دالة المنحنى الاعتدالي بمتوسط (0) وانحراف معياري ($\sqrt{0.1*(X\%*\%bvec)^\wedge 2}$) إلى

$(X\%*\%bvec)$ لتصبح قيمة (y1) تساوي $(y1 = X\%*\%bvec + eps1)$، حيث أن (X) هي مصفوفة المتغيرات التفسيرية أو المتنبئة، $(bvec)$ متجه معاملات الانحدار والذي يحتوي على (الجزء المقطوع b_0، الميل الخاص بالمتغير الأول b_1، الميل الخاص بالمتغير الثاني b_2) وقيمه تساوي (1.2, 2, 0.8) على الترتيب.

البرامج والحزم الإحصائية المستخدمة:

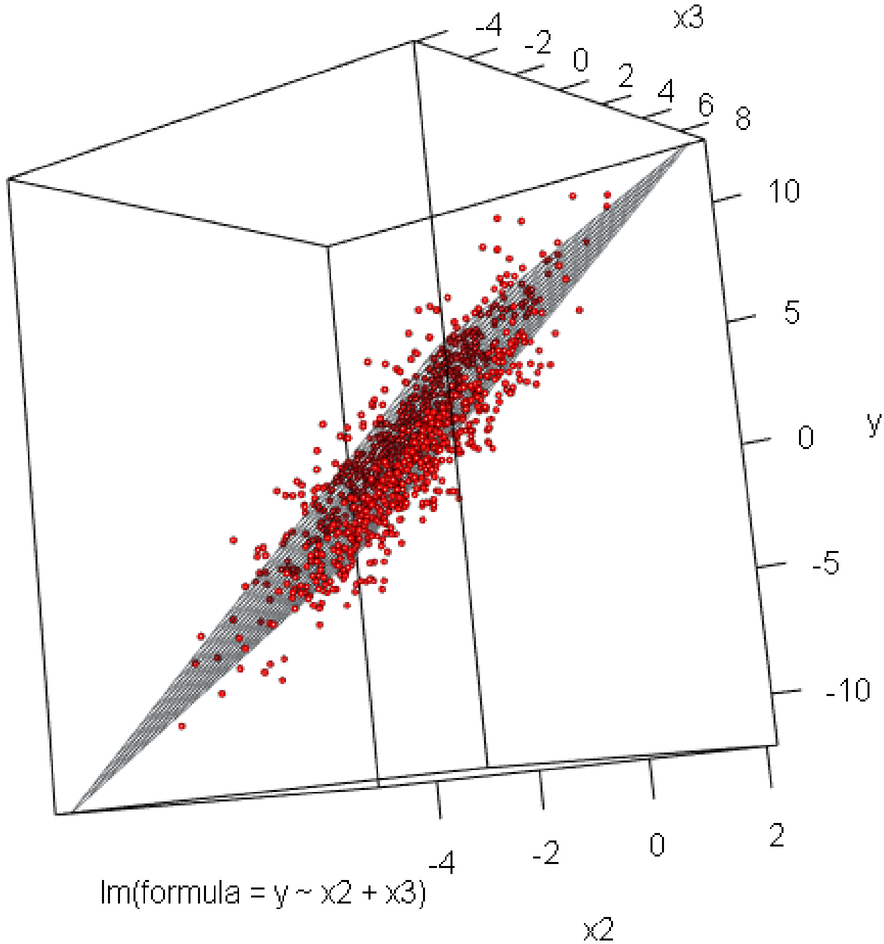
١. تحليل الانحدار المتعدد باستخدام برنامج (27) IBM SPSS (IBM Corp, 2023)
٢. برنامج (R) (R Core Team, 2023)
٣. حزمة (predict3d) لرسم ثلاثي الأبعاد بين القيم الملائمة وبين المتغيرات المشاهدة. (Moon, 2023)
٤. حزمة (sandwich) لإيجاد مصفوفة التباين-التغاير والتي نستخرج منها القيم المُقَدَّرة للخطأ المعياري. (Zeileis, 2004, 2006; Zeileis & Hothorn, 2002; Zeileis et al., 2020; Zeileis & Lumley, 2022)
٥. حزمة (lmtest) لاختبار نماذج الانحدار الخطي. (Hothorn et al., 2022)
٦. حزمة (stargazer) وتستخدم لعمل ملخصات الجداول والإحصاءات الخاصة بالانحدار بصورة منظمة. (Hlavac, 2022)
٧. حزمة (estimatr) وتستخدم لحساب مُقَدَّرات النماذج للاستدلال المعتمد على التصميم. (Blair et al., 2022)
٨. حزمة (whitestrap) وتستخدم لحساب الأخطاء التغايرية بواسطة اختبار وايت. (Lopez Perez, 2020; Pérez, 2020)

نتائج البحث ومناقشتها:

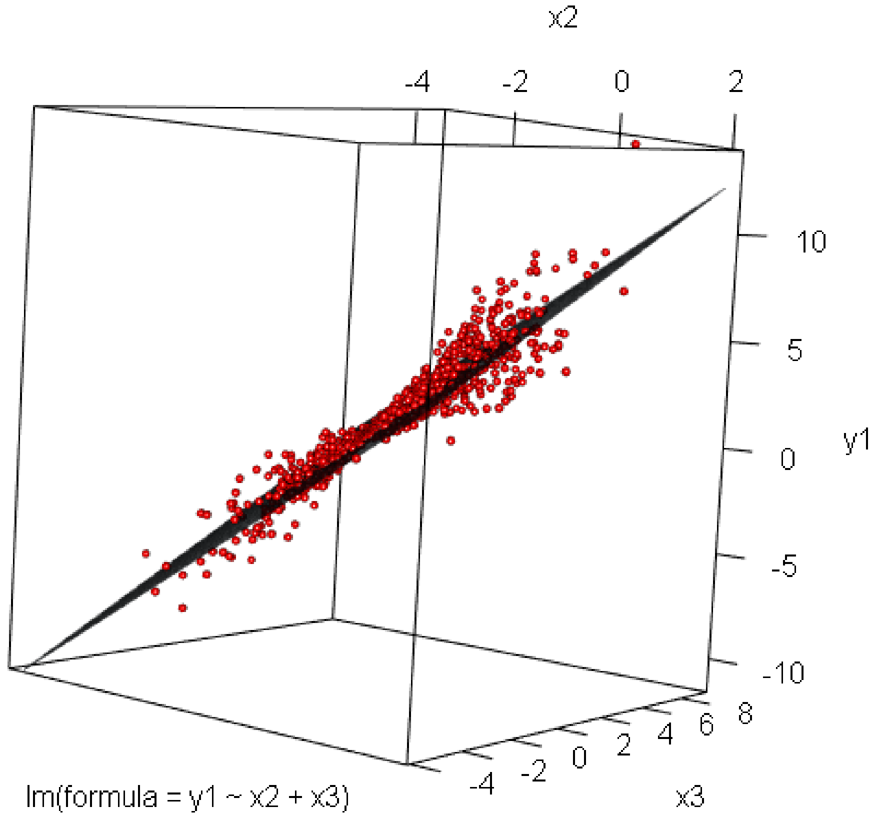
الفرض الأول: ينص الفرض الأول على أنه "لا يختلف شكل البيانات ذات الأخطاء التغايرية عن شكل البيانات ذات الأخطاء الثابتة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد"؛ وللتحقق من هذا الفرض؛ فقد تم استخدام البيانات المولدة (المحاكاة) وقد سبق الإشارة إلى كيفية توليدها وهي مجموعتان **المجموعة الأولى:** وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء الثابتة، والمجموعة الثانية:** وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء التغايرية**، ومن مجموعتي البيانات كل على حده تم إجراء عدة أشكال بيانية تُستخدم للتفرقة والمقارنة بينهما واستخلاص النتائج، فمن الشكلين (٣&٤) تم إيجاد القيم الملائمة (fitted values) وهي عبارة عن سطح مستوي (plan) نظراً لوجود متغيرين تفسيريين (x1&x2)، ومن الشكلين (٥&٦) وفيهما يتم رسم العلاقة بين القيم الملائمة المعيارية (standardized fitted values) على المحور الأفقي وبين البواقي (studentized residuals) على المحور الرأسي لكل من المجموعتين ويتم التشخيص من خلال الرسم البياني للبيانات التي تُظهر أخطاء تغايرية، وهذا يتضح بصورة جلية في الشكل (٦)، أما الشكل (٥) فيتضح فيه أن الأخطاء تكون ثابتة؛ ومما سبق يتضح عدم تحقق الفرض الأول حيث إن النتيجة هي أنه "يختلف شكل البيانات ذات الأخطاء التغايرية عن شكل البيانات ذات الأخطاء الثابتة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد" كما هو موضح من الأشكال (٣&٤&٥&٦).

وفي هذا الإطار أجريت دراسة (Liu & Vasnev, 2019)؛ لتجنب مخاطر التخصيص الخاطئ بين النماذج المتجانسة وغير المتجانسة؛ واقترحت طريقة تجميعية تعتمد على المربعات الصغرى العادية (OLS) والمربعات الصغرى المعممة (GLS). لتحديد الأوزان المثلى للمجموعة. وتم إثبات أمثلية الطريقة في ظل بعض الشروط المنتظمة. وتُظهر نتائج محاكاة مونت كارلو أن الطريقة تكيفية؛ بمعنى أنها

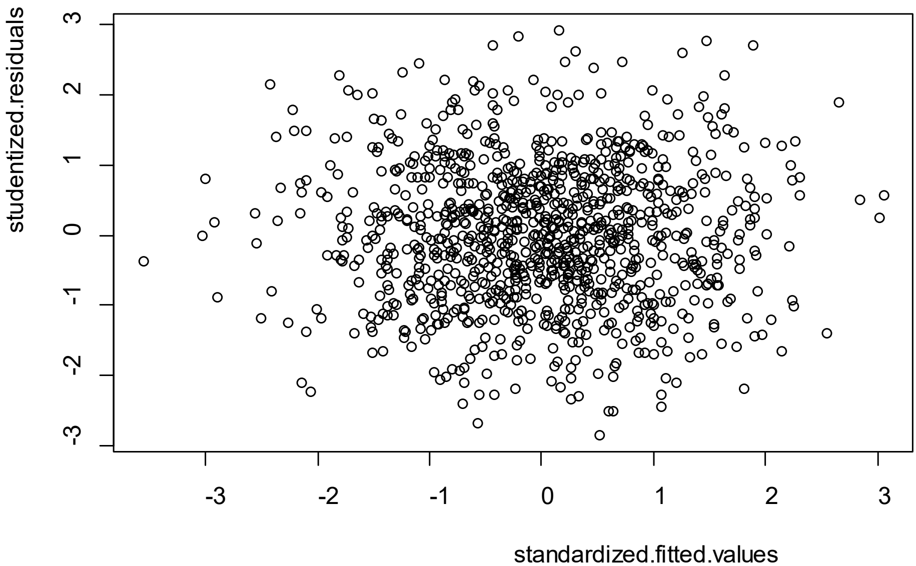
تحقق تقريبًا نفس دقة التقدير كما لو كانت التماثلية أو التغايرية لمصطلح الخطأ معروفتين، **كما أجريت** دراسة (Astivia & Zumbo, 2019)؛ وتهدف إلى تقديم وصف واضح لماهية التغايرية (heteroskedasticity)، وكيفية قياسها من خلال الاختبارات الإحصائية المصممة لها وكيفية معالجتها من خلال استخدام الأخطاء المعيارية المتسقة والمتغايرة وتقنية البوتوستراب (heteroskedastic-consistent standard errors and the wild bootstrap). ويتم تقديم حل خطوة بخطوة للحصول على هذه الأخطاء في (SPSS) دون الحاجة إلى تحميل وحدات ماكرو إضافية (additional macros) أو بناء جملة (syntax.). ويتم التركيز على حقيقة أن تباين الخطأ غير الثابت (non-constant error variance) هو سمة محددة تعتمد على المجتمع وتعتمد على النموذج ويمكن أن تنشأ أنواع مختلفة من التغايرية اعتمادًا على ما يرغب المرء في افتراضه بشأن البيانات.



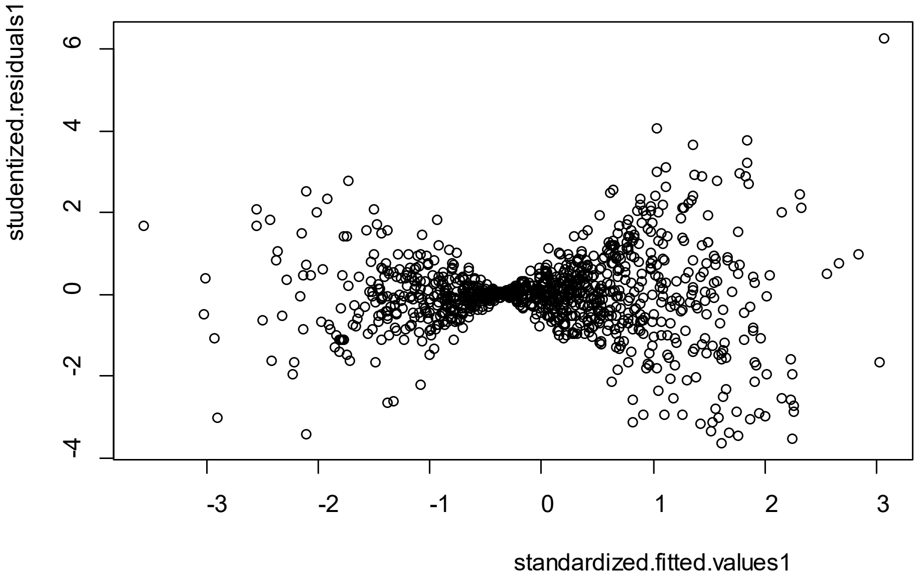
شكل (٣) يوضح القيم الملائمة (fitted values) وهي عبارة عن سطح مستوي (plan) لنموذج الانحدار الخطي المتعدد للمجموعة الأولى: وهي تمثل البيانات ذات الأخطاء الثابتة



شكل (٤) يوضح القيم الملائمة (fitted values) وهي عبارة عن سطح مستوي (plan) لنموذج الانحدار الخطي المتعدد للمجموعة الثانية: وهي تمثل البيانات ذات الأخطاء التغايرية



شكل (٥) يوضح العلاقة بين القيم الملائمة المعيارية (standardized fitted values) وبين البواقي (studentized residuals) لنموذج الانحدار الخطي المتعدد للمجموعة الأولى: وهي تمثل البيانات ذات الأخطاء الثابتة



شكل (٦) يوضح العلاقة بين القيم الملائمة المعيارية (standardized fitted values) وبين البواقي (studentized residuals) لنموذج الانحدار الخطي المتعدد للمجموعة الثانية: وهي تمثل البيانات ذات الأخطاء التغايرية

الفرض الثاني: ينص الفرض الثاني على أنه "لا تختلف دقة الكشف عن الأخطاء التغايرية باختلاف الطريقة المستخدمة للكشف عنها في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الدلالة الإحصائية"؛ وللتحقق من هذا الفرض؛ فقد تم استخدام البيانات المولدة (المحاكاة)، وقد سبق الإشارة إلى كيفية توليدها وهي مجموعتان **المجموعة الأولى:** وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء الثابتة، والمجموعة الثانية:** وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء التغايرية**، وكذلك فقد تم تحديد طريقتين مستخدمتين للكشف عن الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وتم حساب إحصاءة الاختبار (test statistics) والدلالة الإحصائية (P-value) لكل اختبار من الاختبارين المستخدمين، وهي موضحة بالجدول (١)، ويتضح من الجدول (١)

عدم تحقق الفرض الثاني؛ حيث إنه قد وُجد أنه " تختلف دقة الكشف عن الأخطاء التغايرية باختلاف الطريقة المستخدمة للكشف عنها في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الدلالة الإحصائية"، فقد تم التوصل إلى أن اختبار (White's Test of Heteroscedasticity) أكثر دقة في الكشف عن الأخطاء التغايرية حيث كانت قيمة إحصاءة الاختبار الخاصة به أكبر منها في حالة اختبار (Breusch-Pagan Test of Heteroscedasticity) كما كانت الدلالة الإحصائية أقل وهي متوقفة على قيمة الإحصاءة المستخدمة، وفي هذا الصدد أجريت دراسة (Jiang & Deng, 2021) لمعالجة عيوب اختبار باركر التقليدي في النماذج الخطية متعددة المتغيرات كطريقة للكشف عن التغايرية. يُقترح اختبار جديد لعدم تساوي التباين باستخدام القيم الملائمة للعينات كمتغيرات تفسيرية جديدة، وإعادة بناء نموذج الانحدار، وإعطاء اختبار جديد لعدم تساوي التباين بناءً على اختبار الدلالة الإحصائية للمعاملات، كما تتم مقارنته أيضًا باختبار باركر الحالي الذي تم تحسينه باستخدام فكرة المكون الرئيسي. تظهر المحاكاة العددية والتحليلات التجريبية أن اختبار باركر المحسن مع القيم الملائمة للعينات المقترحة في هذا البحث متفوق عن اختبار باركر التقليدي.

كما أجريت أيضاً دراسة (Abdul-Hameed & Matangi, 2021) على التغايرية باعتبارها مشكلة تنشأ في تحليل الانحدار لمجموعة متنوعة من الأسباب. وتؤثر هذه المشكلة على كل من إجراءات التقدير وإجراءات الاختبار، وأوصت الدراسة بأهمية أن تكون قادرًا على اكتشاف المشكلة ومعالجتها. وقد تم اقتراح اختبار (Breusch-Pagan) المعدل للتغايرية في وجود القيم المتطرفة. تم استخدام محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo simulations) ومجموعات البيانات الحقيقية للتحقق من أداء الاختبار المقترح. تم حساب القيمة الاحتمالية (p – value) وقوة جميع الطرق التي تم تناولها في هذه الدراسة، وأشارت النتائج إلى أن النسخة القوية المعدلة

من اختبار (Breusch-Pagan) تفوقت بشكل كبير على الاختبارات السابقة؛ لذلك يوصى باختبار (Breusch-Pagan) المعدل المقترح لاختبار التغايرية في تشخيص الانحدار الخطي، خاصةً عندما تحتوي مجموعات البيانات بوضوح على قيم متطرفة، أيضاً دراسة (Onifade & Olanrewaju, 2020)؛ تم فيها إجراء تقييمات للأداء داخل بيئة برنامج (R). من بين النتائج الأخرى، كشفت الدراسة أن اختبارات (Glejser test) و (Park test) أعادت أفضل اختبار لتوظيفه للتحقق من التغايرية في ((Linear Heteroscedastic Structure (LHS)) و (Exponential Heteroscedastic Structure (EHS)) على التوالي، كما أعادت اختبارات (White and Harrison-McCabe tests) أفضل اختبار لتوظيفه للتحقق من وجود التجانس في((Linear Heteroscedastic Structure (LHS)) و (Exponential Heteroscedastic Structure (EHS)) على التوالي، في حجم العينة أقل من ٥٠، ودراسة (Klein et al., 2016)؛ أكدت على الرغم من وجود طرق لاختبار التغايرية، إلا أنها تتطلب نموذجًا معلمياً لتحديد بنية التغايرية (structure of heteroscedasticity). وهدفت إلى اقتراح مقياس بسيط للتغايرية، والذي لا يحتاج إلى نموذج معلمي وقادر على اكتشاف الأجزاء غير الخطية المحذوفة (omitted nonlinear terms). ويستخدم هذا المقياس تشتت مربعات بواقي الانحدار (squared regression residuals). وأظهرت دراسات المحاكاة أن المقياس يعمل بشكل مرضٍ فيما يتعلق بمعدلات الخطأ من النوع الأول والقوة (Type I error rates and power) عندما يكون حجم العينة وحجم التأثير كبيرًا بدرجة كافية. وهو يتفوق على اختبار (Breusch-Pagan test) عندما يتم حذف الجزء غير الخطي في نموذج التحليل.

جدول (١) يوضح إحصاءة الاختبار (test statistics) والدلالة الإحصائية (P-value) لكل اختبار من الاختبارين المستخدمين في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة والبيانات ذات الأخطاء التغايرية

الاختبار/الطريقة المستخدمة	إحصاءة الاختبار		الدلالة الإحصائية	
	الأخطاء الثابتة	الأخطاء التغايرية	الأخطاء الثابتة	الأخطاء التغايرية
White's Test of Heteroscedasticity	١.٢٧	٢٩٧.٠٣	٠.٥٢٩٩٩٦	٠
Breusch-Pagan Test of Heteroscedasticity	٠.١٦٢٢١٢	٢٨٥.٧٠٤٤	٠.٦٨٧١٣	٠

الفرض الثالث: ينص الفرض الثالث على أنه "جميع السيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الخطأ المعياري على درجة واحدة من الأفضلية"؛ وللتحقق من هذا الفرض؛ فقد تم استخدام البيانات المولدة (المحاكاة)، وقد سبق الإشارة إلى كيفية توليدها وهي مجموعتان **المجموعة الأولى:** وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء الثابتة، والمجموعة الثانية:** وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء التغايرية**، وكذلك فقد تم تحديد السيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات بصفة عامة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد؛ وقد تم حساب البارامترات الثلاثة للنموذج والخطأ المعياري المقابل لكل بارامتر وكذلك قيمة (ت) ودلالتها الإحصائية؛ وهي موضحة بالجدول (٢)، ويتضح من الجدول (٢) عدم تحقق الفرض الثالث؛ حيث إنه قد وُجد أنه "جميع السيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً لمحك الخطأ المعياري **ليست** على درجة واحدة من الأفضلية"؛ فقد تم التوصل إلى الآتي:

في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة نجد أن قيم ثابت الانحدار b_0 يساوي (١.٢٢٦٠- ١.٢٢٧٤- ١.٢٢٥٩) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة نجد أن قيم معامل الانحدار b_1 يساوي (٢.٠٢٤٠- ٢.٠٢٣١- ٢.٠٢٤١) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة نجد أن قيم معامل الانحدار b_2 يساوي (٠.٨٠٩٠- ٠.٨٠٨١- ٠.٨٠٩١) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

مما سبق يتضح أنه في حالة الأخطاء الثابتة فإن قيم معاملات الانحدار تتساوى تقريباً باختلاف السيناريوهات المفترضة؛ إلا أنه يمكن ترتيب السيناريوهات وفقاً لأفضليتها بصفة عامة حسب الخطأ المعياري وقيمة (ت) ودلالتها الإحصائية بأن طريقة المربعات الصغرى العادية جاءت في المرتبة الأولى يليها طريقة المربعات الصغرى الموزونة يليها مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية.

في حالة البيانات ذات الأخطاء التغايرية نجد أن قيم ثابت الانحدار b_0 يساوي (1.1780- 1.2378- 1.1783) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء التغايرية نجد أن قيم معامل الانحدار b_1 يساوي (1.9530- 1.6751- 1.9532) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء التغايرية نجد أن قيم معامل الانحدار b_2 يساوي (0.7740- 0.5634- 0.7737) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

مما سبق يتضح أنه في حالة الأخطاء التغايرية فإن قيم معاملات الانحدار تتساوى تقريباً باختلاف السيناريوهات المفترضة عدا طريقة المربعات الصغرى الموزونة؛ ويمكن ترتيب السيناريوهات وفقاً لأفضليتها بصفة عامة حسب الخطأ المعياري وقيمة (ت) ودلالتها الإحصائية بأن مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية جاءت في المرتبة الأولى يليها طريقة المربعات الصغرى الموزونة، أما طريقة المربعات الصغرى العادية فلا تستخدم في حالة الأخطاء التغايرية وقد وضعت هنا فقط للتوضيح.

وفي هذا الإطار أجريت عدة دراسات منها دراسة (Malyarets et al., 2018)؛ حيث ناقشت مشكلة التغايرية إلى اقتراح تنفيذ وإجراء للعديد من الاختبارات المستخدمة للتحقق من التغايرية في نماذج الانحدار متعددة العوامل باستخدام برنامج (MATLAB)، ودراسة (Barker & Shaw, 2015)؛ التي كشفت وناقشت طرق تقييم الافتراضات والخطوات والاستجابات المناسبة لانتهاك الافتراضات والتي يمكن للفرد اتخاذها، كما أن دراسة (Hayes & Cai, 2007) ناقشت مجموعة من مُقَدَّرات الخطأ المعيارية المتسقة مع التغايرية لانحدار (OLS) وأقامت الحُجَّة بأنه يجب على الباحثين استخدام أحد هذه المُقَدَّرات بشكل روتيني عند إجراء اختبارات الفرضيات باستخدام انحدار (OLS)؛ ولتسهيل اعتماد هذه التوصية؛ قدمت الدراسة وحدات ماكرو سهلة الاستخدام لبرامج (SPSS-SAS)؛ لتنفيذ الإجراءات التي تمت مناقشتها.

جدول (٢) السيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء الثابتة والبيانات ذات الأخطاء التغايرية ومعاملات الانحدار والخطأ المعياري وقيمة (ت) والدلالة الإحصائية لكل سيناريو من هذه السيناريوهات

السيناريوهات المفترضة	البيانات المولدة		b	se_b	t	$P-value$
طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)	الأخطاء الثابتة	b_0	1.2260	٠.098	12.507	1.9165E-33
		b_1	2.0240	٠.042	47.725	1.0443E-259
		b_2	0.8090	٠.022	37.089	6.6594E-190
	الأخطاء التغايرية	b_0	1.1780	٠.058	20.359	E-77٢,٥٣٥٨
		b_1	1.9530	٠.025	77.991	E0٠,٠
		b_2	0.7740	٠.013	60.062	E0٠,٠
طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS)	الأخطاء الثابتة	b_0	1.2274	٠,٠٩٧٩٣	١٢,٥٣	<2e-16
		b_1	2.0231	٠,٠٤٢٣٩	٤٧,٧٢	<2e-16
		b_2	0.8081	٠,٠٢١٨٢	٣٧,٠٤	<2e-16
	الأخطاء التغايرية	b_0	1.2378	٠,١٤٣٦١	٨,٦١٩	<2e-16
		b_1	1.6751	٠,٠٤٨٦٢	٣٤,٤٥٠	<2e-16
		b_2	0.5634	٠,٠٢٠١٣	٢٧,٩٩٤	<2e-16
مصفوفة	الأخطا	b_0	1.2259	٠,١٠٤٤٥٥	١١,٧٣٦	< 2.2e-16

السيناريوهات المفترضة	البيانات المولدة		b	se_b	t	$P-value$
التغاير متسقة الأخطاء التغايرية (HCCM) (HC3)	ء الثابتة					
		b_1	2.0241	٠,٠٤٤٢٥٧	٤٥,٧٣٦	< 2.2e-16
		b_2	0.8091	٠,٠٢٣١٤٩	٣٤,٩٥٢	< 2.2e-16
	الأخطاء التغايرية	b_0	1.1783	٠,٠٦٠٦٠٧	١٩,٤٤٢	< 2.2e-16
		b_1	1.9532	٠,٠٣٥٦٢٣	٥٤,٨٣١	< 2.2e-16
		b_2	0.7737	٠,٠١٦٠٢٧	٤٨,٢٧٥	< 2.2e-16

الفرض الرابع: ينص الفرض الرابع على أنه "لا تختلف فترات الثقة لمعاملات الانحدار في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً للسيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية"؛ وللتحقق من هذا الفرض؛ فقد تم استخدام البيانات المولدة (المحاكاة)، وقد سبق الإشارة إلى كيفية توليدها وهي مجموعتان **المجموعة الأولى:** وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء الثابتة، والمجموعة الثانية:** وهي تمثل **البيانات ذات الأخطاء التغايرية**، وكذلك فقد تم حساب فترات الثقة (confidence intervals) الدنيا والعليا عند مستويات الدلالة الإحصائية (٠.٠٥ & ٠.٠١) للبارامترات الثلاثة للنموذج؛ وهي موضحة بالجدول (٣)، ويتضح من الجدول (٣) عدم تحقق الفرض الرابع؛ حيث إنه قد وُجد أنه "تختلف فترات الثقة لمعاملات الانحدار في نموذج الانحدار الخطي المتعدد وفقاً للسيناريوهات المفترضة والمستخدمة للتعامل مع البيانات ذات الأخطاء التغايرية"؛ فقد تم التوصل إلى الآتي:

في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95%) لقيم ثابت الانحدار b_0 يساوي (١.٤١٨٣–١.٠٣٣٧)، (١.٤١٩٦–١.٠٣٥٢)، (١.٠٢٠٩ –١.٤٣٠٨) وفقاً

لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95%) لقيم ثابت الانحدار b_1 يساوي (١.٩٤١٦–٢.١٠٦٤)، (١.٩٣٩٩–٢.١٠٦٣)، (١.٩٣٧٣–٢.١١١٠) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95%) لقيم ثابت الانحدار b_2 يساوي (٠.٧٦٥٨–٠.٨٥٢٢)، (٠.٧٦٥٣–٠.٨٥٠٩)، (٠.٧٦٣٧–٠.٨٥٤٥) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 99%) لقيم ثابت الانحدار b_0 يساوي (٠.٩٧٣١–١.٤٧٨٩)، (٠.٩٧٤٧–١.٤٨٠١)، (٠.٩٥٦٣–١.٤٩٥٤) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 99%) لقيم ثابت الانحدار b_1 يساوي (١.٩١٥٦–٢.١٣٢٤)، (١.٩١٣٧–٢.١٣٢٥)، (١.٩٠٩٩–٢.١٣٨٤) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء الثابتة نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 99%) لقيم ثابت الانحدار b_2 يساوي (٠.٨٦٥٨–٠.٧٥٢٢)، (٠.٨٦٤٤–٠.٧٥١٨)، (٠.٨٦٨٨–٠.٧٤٩٤) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

مما سبق يتضح أنه في حالة الأخطاء الثابتة فإن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95%) تتساوى تقريباً باختلاف السيناريوهات المفترضة، كذلك فإنه في حالة الأخطاء الثابتة فإن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 99%) تتساوى تقريباً باختلاف السيناريوهات المفترضة.

في حالة البيانات ذات الأخطاء التغايرية نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95%) لقيم ثابت الانحدار b_0 يساوي (١.٢٩١٨–١.٠٦٤٢)، (١.٥١٩٦–٠.٩٥٦٠)، (١.٢٩٧٣–١.٠٥٩٤) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء التغايرية نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95%) لقيم ثابت الانحدار b_1 يساوي (٢.٠٠٢١–١.٩٠٣٩)، (١.٧٧٠٥–١.٥٧٩٧)، (٢.٠٢٣٢–١.٨٨٣٣) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء التغايرية نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95%) لقيم ثابت الانحدار b_2 يساوي (٠.٧٩٩٥–٠.٧٤٨٥)، (٠.٦٠٢٩–٠.٥٢٣٩)، (٠.٨٠٥٢–٠.٧٤٢٣) وفقاً

لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء التغايرية نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 99%) لقيم ثابت الانحدار b_0 يساوي (١.٠٢٨٣–١.٣٢٧٧)، (٠.٨٦٧٢–١.٦٠٨٤)، (١.٠٢١٩–١.٣٣٤٨) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء التغايرية نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 99%) لقيم ثابت الانحدار b_1 يساوي (١.٨٨٨٥–٢.٠١٧٥)، (١.٥٤٩٦–١.٨٠٠٥)، (١.٨٦١٣–٢.٠٤٥٢) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

في حالة البيانات ذات الأخطاء التغايرية نجد أن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 99%) لقيم ثابت الانحدار b_2 يساوي (٠.٧٤٠٤–٠.٨٠٧٦)، (٠.٥١١٥–٠.٦١٥٤)، (٠.٧٣٢٣–٠.٨١٥١) وفقاً لطريقة المربعات الصغرى العادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة ومصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية على التوالي.

مما سبق يتضح أنه في حالة الأخطاء التغايرية فإن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 95%) تختلف باختلاف السيناريوهات المفترضة، كذلك فإنه في حالة الأخطاء التغايرية فإن فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%) وفترات الثقة العليا (CI Upper 99%) تختلف باختلاف السيناريوهات المفترضة، وفي كلتا الحالتين نجد أن طريقة المربعات الصغرى الموزونة أكثر تحفظاً من مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية، أما طريقة

المربعات الصغرى العادية فلا تستخدم في حالة الأخطاء التغايرية وقد وضعت هنا فقط للتوضيح.

وفي هذا الصدد أجريت دراسة (Malyarets et al., 2018)؛ حيث أن مشكلة التغايرية والتي يمكن أن تشوه قيمة الانحراف المعياري الحقيقي لأخطاء التنبؤ. ويمكن أن يصاحب ذلك زيادة ونقصان في فترة الثقة (confidence interval).

كما أكد (Gujarati, 2011, pp. 82-83)، أنه في حالة وجود التغايرية، يتم توفير أفضل مُقَدَّر خطي غير متحيز (best linear unbiased estimators (BLUE)) بطريقة المربعات الصغرى الموزونة (weighted least squares (WLS)).

جدول (٣) فترات الثقة (confidence intervals) الدنيا والعليا عند مستويات الدلالة الإحصائية (٠.٠٥ & ٠.٠١) للبارامترات الثلاثة للنموذج

السيناريوهات المفترضة	البيانات المولدة		b	فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%)	فترات الثقة العليا (CI Upper 95%)	فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%)	فترات الثقة العليا (CI Upper 99%)
طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)	الأخطاء الثابتة	b_0	1.2260	1.0337	1.4183	0.9731	1.4789
		b_1	2.0240	1.9416	2.1064	1.9156	2.1324
		b_2	0.8090	0.7658	0.8522	0.7522	0.8658
	الأخطاء التغايرية	b_0	1.1780	1.0642	1.2918	1.0283	1.3277
		b_1	1.9530	1.9039	2.0021	1.8885	2.0175
		b_2	0.7740	0.7485	0.7995	0.7404	0.8076
طريقة المربعات الصغرى	الأخطاء الثابتة	b_0	1.2274	1.0352	1.4196	0.9747	1.4801
		b_1	2.0231	1.9399	2.1063	1.9137	2.1325
		b_2	0.8081	0.7653	0.8509	0.7518	0.8644

فترات الثقة العليا (CI Upper 99%)	فترات الثقة الدنيا (CI Lower 99%)	فترات الثقة العليا (CI Upper 95%)	فترات الثقة الدنيا (CI Lower 95%)	b	البيانات المولدة		السيناريوهات المفترضة
1.6084	0.8672	1.5196	0.9560	1.2378	b_0	الأخطاء التغايرية	الموزونة (WLS)
1.8005	1.5496	1.7705	1.5797	1.6751	b_1		
0.6154	0.5115	0.6029	0.5239	0.5634	b_2		
1.4954	0.9563	1.4308	1.0209	1.2259	b_0	الأخطاء الثابتة	مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية (HCCM) (HC3)
2.1384	1.9099	2.1110	1.9373	2.0241	b_1		
0.8688	0.7494	0.8545	0.7637	0.8091	b_2		
1.3348	1.0219	1.2973	1.0594	1.1783	b_0	الأخطاء التغايرية	
2.0452	1.8613	2.0232	1.8833	1.9532	b_1		
0.8151	0.7323	0.8052	0.7423	0.7737	b_2		

التوصيات والبحوث المقترحة: من خلال النتائج التي توصل إليها البحث الحالي والدراسات السابقة يمكن التوصية بأنه من الأفضل استخدام طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) وطريقة مصفوفة التغاير متسقة الأخطاء التغايرية (HCCM) في جميع الأحوال عند استخدام نموذج الانحدار الخطي سواء البسيط أو المتعدد، وهذا يتفق مع ما اقترحه بعض الخبراء أنه نظرًا لأن الأخطاء التغايرية تمثل مشكلة شائعة في نماذج الانحدار الخطية (LRMs)؛ فيجب علينا دائمًا استخدام طريقة لتصحيح أو تقليل تلك الأخطاء التغايرية؛ ففي حالة عدم وجود أخطاء تغايرية، تكون نتائج النماذج المصححة وغير المصححة متشابهة، ولكن في حالة وجود أخطاء تغايرية، فإن نتائج النماذج يمكن أن تكون مضللة(Hoffmann, 2021, pp. 182-183).

كذلك من خلال النتائج التي توصل إليها البحث الحالي والدراسات السابقة يمكن التوصية بما يلي كبحوث لاحقة:

- كشف وتقييم الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي المتعدد في حالة وجود بعض القيم المتطرفة.
- دراسة سيناريوهات أخرى بديلة للتعامل مع الأخطاء التغايرية في نموذج الانحدار الخطي.
- التحقق من وجود الأخطاء التغايرية في نماذج الانحدار الخطي باستخدام طرق أخرى بديلة.
- مقارنة فاعلية طرق أخرى بديلة للكشف عن وجود الأخطاء التغايرية في نماذج الانحدار الخطي ومحاولة التوصيات باستخدام أفضل الطرق الممكنة.
- ابتكار حزم إحصائية كما في برنامج (R) قائمة على الطرق المبتكرة والمستخدمة في التحقق من وجود الأخطاء التغايرية في نماذج الانحدار الخطي.

المراجع:

Abdul-Hameed, B., & Matanmi, O. G. (2021). A Modified Breusch–Pagan Test for Detecting Heteroscedasticity in the Presence of Outliers. *Pure and Applied Mathematics Journal*, *10*(6), 139-149 .

Astivia, O. L. O., & Zumbo, B. D. (2019). Heteroskedasticity in Multiple Regression Analysis: What it is, How to Detect it and How to Solve it with Applications in R and SPSS. *Practical Assessment, Research, and Evaluation*, *24*(1), 1 .

Barker, L. E., & Shaw, K. M. (2015). Best (but oft-forgotten) practices: checking assumptions concerning regression residuals. *Am J Clin Nutr*, *102*(3), 533-539. https://doi.org/10.3945/ajcn.115.113498

Blair, G., Cooper, J., Coppock, A., Humphreys, M., & Sonnet, L. (2022). *estimatr: Fast Estimators for Design-Based Inference*. In https://CRAN.R-project.org/package=estimatr

Brown, J. D. (2014). Linear models in matrix form. In *Linear Models in Matrix Form*. Springer .

Das, D., & Das, T. (2023). The "P"-Value: The Primary Alphabet of Research Revisited. *Int J Prev Med*, *14*, 41. https://doi.org/١٠,٤١٠٣/ijpvm.ijpvm_200_22

Fox, J. (2015). *Applied regression analysis and generalized linear models*. Sage Publications .

Gujarati, D. (2011). Econometrics by Example/Damodar Gujarati. *Number*, *330*, G84 .

Hayes, A. F., & Cai, L. (2007). Using heteroskedasticity-consistent standard error estimators in OLS regression: An introduction and software implementation. *Behavior research methods*, *39*, 709-722 .

Hlavac, M. (2022). *stargazer: Well-Formatted Regression and Summary Statistics Tables*. In https://CRAN.R-project.org/package=stargazer

Hoffmann, J. P. (2021). *Linear regression models: applications in R*. Crc Press .

Hothorn, T., Zeileis, A., Farebrother, R. W., & Cummins, C. (2022). *lmtest: Testing Linear Regression Models*. In https://CRAN.R-project.org/package=lmtest

IBM Corp. (2023). IBM SPSS Statistics for Windows (Version 27.0) [Computer software]. IBM Corp .

Jiang, J., & Deng, G. (2021). Parker Test for Heteroskedasticity Based on Sample Fitted Values. *Open Journal of Statistics*, *11*(03), 400-408. https//:doi.org/10.4236/ojs.2021.113024

Klein, A. G., Gerhard, C., Büchner, R. D., Diestel, S., & Schermelleh-Engel, K. (2016). The detection of heteroscedasticity in regression models for psychological data. *Psychological Test and Assessment Modeling*, *58*(4), 5 .٦٧

Liu, Q., & Vasnev, A. L. (2019). A Combination Method for Averaging OLS and GLS Estimators. *Econometrics*, *7*(3). https://doi.org/10.3390/econometrics7030038

Long, J. S., & Ervin, L. H. (2000). Using heteroscedasticity consistent standard errors in the linear regression model. *The American Statistician*, *54*(3), 217-224 .

Lopez Perez, J. (2020). *whitestrap: White Test and Bootstrapped White Test for Heteroskedasticity*. In https://CRAN.R-project.org/package=whitestrap

Malyarets, L., Kovaleva, K., Lebedeva, I., Misiura, I., & Dorokhov, O. (2018). The Heteroskedasticity Test Implementation for Linear Regression Model Using MATLAB. *Informatica*, *42*(4). https://doi.org/10.31449/inf.v42i4.1862

Moon, K.-W. (2023). *predict3d: Draw Three Dimensional Predict Plot Using Package rgl*. In https://github.com/cardiomoon/predict3d

Musselwhite, D. J., & Wesolowski, B. C. (2018). Standard Error of Measurement. In B. B. Frey (Ed.), *The SAGE encyclopedia of educational research, measurement, and evaluation* (pp. 1-5): SAGE Publications, Inc. Thousand Oaks.

Onifade, O. C., & Olanrewaju, S. O. (2020). Investigating Performances of Some Statistical Tests for Heteroscedasticity Assumption in Generalized Linear Model: A Monte Carlo

Simulations Study. *Open Journal of Statistics*, *1*-٤٥٣ ,(٠٣)٠ .٤٩٣https://doi.org/10.4236/ojs.2020.103029

Pérez, J. L. (2020). *Bootstrapped White's test under the methodology of Jeong, J., Lee, K. (1999)*. In https://github.com/jlopezper/whitestrap

R Core Team. (2023). R: A Language and Environment for Statistical Computing_. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. >https://www.R-project.org >/

Su, L., Zhao, Y., Yan, T., & Li, F. (2012). Local Polynomial Estimation of Heteroscedasticity in a Multivariate Linear Regression Model and Its Applications in Economics. *PLoS One*, *7*(9). https://doi.org/https://doi.org/10.1371/journal.pone.0043719

Zeileis, A. (2004). *Econometric Computing with HC and HAC Covariance Matrix Estimators*. In https://doi.org/10.18637/jss.v011.i10

Zeileis, A. (2006). *Object-Oriented Computation of Sandwich Estimators*. In https://doi.org/10.18637/jss.v016.i09

Zeileis, A., & Hothorn, T. (2002). *Diagnostic Checking in Regression Relationships*. In https://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/

Zeileis, A., Köll, S., & Graham, N. (20 .(٢٠*Various Versatile Variances: An Object-Oriented Implementation of Clustered Covariances in R*. In https://doi.org/10.18637/jss.v095.i01

Zeileis, A., & Lumley, T. (2022). *sandwich: Robust Covariance Matrix Estimators*. In https://sandwich.R-Forge.R-project.org/